
FACTORISATION DE LA COHOMOLOGIE DE SYSTÈMES LOCAUX p -ADIQUES SUR LE DEMI-PLAN DE DRINFELD

par

Arnaud Vanhaecke

Résumé. — On calcule le premier groupe de cohomologie de l’algèbre symétrique du système local étale p -adique universel sur la tour de revêtement du demi-plan p -adique de Drinfeld. Le résultat s’énonce sous une forme factorisée en utilisant la correspondance de Langlands p -adique en famille sur les anneaux de Kisin. Ce travail étend les résultats correspondants de Colmez, Dospinescu et Nizioł pour les coefficients triviaux. Il repose sur le calcul des multiplicités automorphes dans le groupe de cohomologie étale du système local, obtenu dans un article précédent, et la détermination des anneaux de Kisin pour le type spécial comme fonctions sur un ouvert analytique de la droite projective.

Abstract. — We compute the first cohomology group of the symmetric algebra of the universal étale p -adic local system on the tower of coverings of Drinfeld’s p -adic half-plane. The result takes a factorized form, using the p -adic Langlands correspondence in families over Kisin rings. This work extends the corresponding results of Colmez, Dospinescu, and Nizioł for trivial coefficients. It relies on the computation of automorphic multiplicities in the étale cohomology group of the local system, done in a previous paper, as well as on the determination of the Kisin rings for the special type as functions on an analytic open subset of the projective line.

Table des matières

1. Introduction.....	2
1.1. Enoncés des résultats.....	2
1.2. Notations.....	3
1.3. Plan de l’article.....	7
1.4. Remerciements.....	7
2. Anneaux de Kisin.....	7
2.1. La série spéciale p -adique.....	8
2.2. Déformations infinitésimales de $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$	14
2.3. Déformations infinitésimales de $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda}$	17
2.4. Complétion \mathcal{B} -adique et anneaux de Kisin.....	20
2.5. Fin de la preuve et corollaires.....	24
3. Factorisation de la cohomologie étale du système local.....	24
3.1. Rappels et compléments de [26].....	25
3.2. Décomposition en blocs.....	29
Références.....	34

1. Introduction

Soit p un nombre premier, $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}_p , $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\check{G} := D^\times$ le groupe des unités de D , l'algèbre des quaternions non scindée sur \mathbb{Q}_p . Soit C le complété d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de \mathbb{Q}_p , et soit L une extension finie, assez grande, de \mathbb{Q}_p qui est notre corps des coefficients. Dans [26], nous avons calculé la multiplicité des représentations galoisiennes dans la cohomologie (c'est-à-dire, dans le premier groupe de cohomologie) de l'algèbre symétrique du système local universel, notée $\text{SymV}(1)$, sur la tour de revêtements de Drinfeld $\{\check{M}_C^n\}_{n \geq 0}$, en termes de la correspondance de Langlands p -adique.

Ce travail étendait des résultats de Colmez Dospinescu et Nizioł (*cf.* [9]) qui traitent le cas des coefficients triviaux $L(1)$. Les deux différences principales sont les suivantes :

- Alors que la cohomologie étale de $\{\check{M}_C^n\}_{n \geq 0}$ à coefficients dans $L(1)$ fait apparaître les représentations potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate $(0, 1)$, la cohomologie à coefficients dans $\text{SymV}(1)$ fait apparaître toutes les représentations potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate réguliers positifs.
- Une seconde différence, plus importante, est que la cohomologie étale de \check{M}_C^0 à coefficients dans $L(1)$ est simplement le dual d'une Steinberg continue, alors qu'à coefficients dans $\text{SymV}(1)$, elle fait apparaître toutes les représentations semi-stables non cristallines (et même une représentation cristalline dite *exceptionnelle*), avec la multiplicité attendue (*i.e.* donnée par la correspondance de Langlands p -adique).

À la suite de [9] et pour $p > 3$, Colmez Dospinescu et Nizioł déterminent la structure complète de la cohomologie étale de⁽¹⁾ $\{{}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n\}_{n \geq 0}$ à coefficients dans $L(1)$ comme $L[G \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \times \check{G}]$ -module (*cf.* [11]). Le résultat s'énonce sous une forme factorisée, similaire à la description d'Emerton (*cf.* [17]) dans le cas de la cohomologie complétée des courbes modulaires, et fait intervenir les anneaux de déformation potentiellement cristallins introduits par Kisin (*cf.* [20]), dont certaines propriétés essentielles (en particulier que ce sont des produits finis d'anneaux principaux) ont été établies dans [10].

1.1. Enoncés des résultats. — Le but de cet article est de poursuivre cette entreprise, à partir des résultats de [26], pour obtenir une description similaire de la cohomologie de ${}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n$ à coefficients dans $\text{SymV}(1)$, comme $L[G \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \times \check{G}]$ -module, sous une forme factorisée :

Théorème 1.1. — *Pour $p > 3$, on a un isomorphisme de $L[G \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \times \check{G}]$ -modules topologiques :*

$$H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n ; \text{SymV}(1)) \cong \bigoplus_{\lambda} \bigoplus_M \widehat{\left(\bigoplus_{\mathcal{B}} \Pi(\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda})' \otimes \rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda} \otimes \check{R}_{\mathcal{B}, M}^{\lambda} \right)} \otimes_L \text{JL}_M^{\lambda}.$$

Expliquons brièvement les termes de cet énoncé, qui seront détaillés dans la suite.

- La première somme porte sur les *poids de Hodge-Tate* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$. La seconde somme porte sur les L -($\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$)-modules spéciaux et cuspidaux M compatibles à λ et de niveau $\leq n$. La troisième somme, complétée pour la topologie p -adique, porte sur les blocs \mathcal{B} des représentations de G modulo p que l'on identifie (*cf.* [23]) aux représentations $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$ modulo p de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ semi-simples et de dimension 2.
- Les produits tensoriels sont au-dessus de l'anneau de Kisin $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ qui est l'anneau de déformation de $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$ des représentations de type M et à poids de Hodge-Tate λ ; $\check{R}_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ est le L -dual continu de $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$. Le $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -module $\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ est la déformation universelle et $\Pi(\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda})'$ est le dual stéréotypique du $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}[G]$ -module associé à $\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ par la correspondance de Langlands p -adique.

⁽¹⁾Deux petites différences avec le cas précédent sont de remplacer C par $\overline{\mathbb{Q}}_p$ dans les coefficients de l'espace de Drinfeld et de considérer ${}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n = \check{M}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n/p$, où p est vu comme un élément de G .

- Le dernier terme JL_M^λ est la représentation localement algébrique de \check{G} de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$ associée à M par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Pour M cuspidal (apparaissant dès que $n \geq 1$), le résultat est exactement le même que celui de [11], et fait intervenir les poids supérieurs. Il suffit alors, en utilisant les résultats de [10] et les calculs de [26], de reprendre pas à pas la démonstration de [11]. L'un des points les plus délicat de [11] est la démonstration de propriétés de finitude de la cohomologie étale modulo p ; à coefficients, on peut directement utiliser ces résultats puisque le système local en question modulo p devient trivial sur un revêtement fini, puis utiliser la suite spectrale d'Hochschild-Serre pour obtenir ces propriétés pour tous les étages.

Pour M spécial (c'est-à-dire, $n = 0$ à torsion par un caractère près), alors que le résultat à coefficients dans $L(1)$ est simplement que la cohomologie étale du demi-plan de Drinfeld est le dual d'une Steinberg continue, il est bien plus riche à coefficients non triviaux. La preuve de ce cas constitue le noyau dur du présent travail. En particulier, pour démontrer le théorème 1.1 dans le cas spécial, on doit adapter les résultats de [10] aux anneaux de Kisin de type spécial; le théorème utilisé, obtenu dans le chapitre 2, est le suivant :

Théorème 1.2. — *Supposons $p > 3$, si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2$ sont tels que $\lambda_2 - \lambda_1 > 1$ et M un $L(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module de rang 2 tel que $N \neq 0$, alors l'anneau de Kisin $R_{\mathcal{B}, M}^\lambda$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}_L^{1, \text{an}}$; de plus, c'est un produit fini d'anneaux principaux.*

1.2. Notations. — On suppose que $p > 3$. Soient $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil et $\mathcal{WD}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil-Deligne. On note $O_D \subset D$ l'unique ordre maximal et $\varpi_D \in O_D$ une uniformisante. On suppose que L est assez grande, en particulier qu'elle contient toutes les extensions quadratiques de \mathbb{Q}_p . Soient $O_L \subset L$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{m}_L \subset O_L$ son idéal maximal et $k_L := O_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel. On fixe $\varpi_L \in \mathfrak{m}_L$ une uniformisante. Pour A un anneau (topologique), une A -représentation (*continue*) désigne une représentation sur un A -module (topologique). De plus, tous les Hom entre A -représentations topologiques seront continus et munis de la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées.

Soit $\mathrm{rec}: \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ le morphisme de réciprocité, normalisé de sorte que le Frobenius arithmétique soit envoyé sur p , $\det: G \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ le déterminant et $\mathrm{nrd}: \check{G} \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ la norme réduite. Au travers de ces caractères tout L -caractère (*i.e.* L -représentation de dimension 1) de \mathbb{Q}_p^\times définit un L -caractère de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$, G et \check{G} et s'il est unitaire (*i.e.* à coefficients dans O_L^\times), de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$; on identifie ainsi les caractères de ces groupes. On note $\omega: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow O_L^\times$ le caractère cyclotomique défini pour $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ par $\omega(x) = x|x|_p$.

1.2.1. Types spéciaux et cuspidaux. — On fixe une injection $D \hookrightarrow M_2(L)$ qui définit une injection $\check{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(L)$, ce qui est possible puisque L contient une extension quadratique de \mathbb{Q}_p . On note

$$P := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_2 > \lambda_1\},$$

l'ensemble des *poids de Hodge-Tate réguliers* et $P_+ \subset P$ l'ensemble des poids positifs, *i.e.* tels que $\lambda_1 \geq 0$. À $\lambda \in P$ on associe $w(\lambda) := \lambda_2 - \lambda_1 \in \mathbb{N}$ et $|\lambda| := \lambda_2 + \lambda_1 \in \mathbb{Z}$ et on dit que $\lambda \in P$ est très régulier si $w(\lambda) > 1$. Si V est une L -représentation de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, on dit qu'elle est à poids de Hodge-Tate $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ si ses poids de Hodge-Tate sont λ_1 et λ_2 .

Un $L(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ -module M muni d'un Frobenius φ , d'un opérateur de monodromie N tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action lisse de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ commutant à φ et N . On associe à M une L -représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(M)$, *i.e.* une représentation du groupe $\mathcal{WD}_{\mathbb{Q}_p}$. Si M est de rang 2, on dit que M est

- *cuspidal* si $\mathrm{WD}(M)$ est absolument irréductible; dans ce cas $N = 0$,
- *exceptionnel* si $\mathrm{WD}(M) \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ où $\chi_1, \chi_2: \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow L^\times$ sont deux caractères lisses tels que $\chi_1 \chi_2^{-1} = |\mathrm{rec}|_p^{\pm 1}$, où $\mathrm{rec}: \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ est le morphisme de réciprocité,
- *spécial* si M est exceptionnel ou bien si $N \neq 0$ (notons que $N \neq 0$ implique que $\mathrm{WD}(M)^{\mathrm{ss}}$ est exceptionnel).

Pour $\lambda \in P$, on note (*cf.* [26, Définition 11.2]) $\widetilde{\Phi N}_\lambda$ (*resp.* ΦN_λ) l'ensemble des L -($\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$)-modules spéciaux⁽²⁾ (*resp.* non exceptionnel) ou cuspidaux dont la moyenne des pentes est $1 - |\lambda|/2$ (ΦN_λ ne dépend donc que de $|\lambda|$). À $\lambda \in P$ et $M \in \widetilde{\Phi N}_\lambda$ on associe des représentations localement algébriques unitaires de G et \check{G} :

- Soit LL_M la L -représentation lisse de G obtenue en appliquant la correspondance de Langlands locale à $\text{WD}(M)$. On définit une L -représentation unitaire localement algébrique de G de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$:

$$\text{LL}_M^\lambda := \text{LL}_M \otimes_L \text{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \det^{\lambda_1},$$

où $\text{Sym}_L^{w(\lambda)-1}$ est la puissance $w(\lambda) - 1 = (\lambda_2 - \lambda_1) - 1$ symétrique de la représentation standard L^2 de G . On note ζ_M^λ le L -caractère central (unitaire) de LL_M^λ .

Si M est spécial non exceptionnel, alors LL_M^λ est la torsion par $(\zeta_M^\lambda \circ \det)$ de la *steinberg* localement algébrique de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$, définie par $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} = \text{St}_L^\infty \otimes_L W_\lambda^*$, où

$$W_\lambda^* := \text{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \det^{\lambda_1} \otimes_L |\det|_p^{\frac{|\lambda|-1}{2}},$$

et St_L^∞ est la steinberg lisse de G *i.e.* l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ modulo les fonctions constantes. Notons que le dernier facteur de la définition de W_λ^* , où l'on rappelle que $|\lambda| = \lambda_2 + \lambda_1$, est présent pour s'assurer que $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$ est unitaire. Si M est exceptionnel, LL_M^λ est⁽³⁾ la torsion par $(\zeta_M^\lambda \circ \det)$ de l'unique extension localement algébrique de W_λ^* par $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$ que l'on note $\tilde{\text{St}}_\lambda^{\text{lalg}}$.

- Soit⁽⁴⁾ JL_M la L -représentation lisse de \check{G} associée à LL_M par la correspondance de Jacquet-Langlands à JL_M . On définit une L -représentation unitaire localement algébrique de \check{G} de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$:

$$\text{JL}_M^\lambda = \text{JL}_M \otimes_L \text{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \text{nrd}^{\lambda_1},$$

où $\text{Sym}_L^{w(\lambda)-1}$ est vu comme représentation de \check{G} au travers de l'injection $\check{G} \hookrightarrow \text{GL}_2(L)$. Le caractère central de JL_M^λ est le même que celui de LL_M^λ , c'est-à-dire ζ_M^λ .

Si M est spécial, $\text{JL}_M^\lambda \cong \check{W}_\lambda \otimes_L (\zeta_M^\lambda \circ \text{nrd})$ où

$$(1.1) \quad \check{W}_\lambda := \text{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \text{nrd}^{\lambda_1} \otimes_L |\text{nrd}|_p^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

Côté galoisien, si $\lambda \in P$ et $M \in \widetilde{\Phi N}_\lambda$ alors on dit que V , une L -représentation de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2, est *de type*⁽⁵⁾ (M, λ) si elle est à poids de Hodge-Tate λ et⁽⁶⁾ $\mathbf{D}_{\text{pst}}(V) = M[-1]$. En particulier, on dit que V est *cuspidalement* (*resp.* *spéciale*, *exceptionnelle*) si M est cuspidal (*resp.* spécial, exceptionnel).

Si V est de type (M, λ) , elle est caractérisée par un invariant $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\text{dR}})$ qui est le paramètre de la filtration à deux crans sur $M_{\text{dR}} := (M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} \overline{\mathbb{Q}_p})^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$. De plus, $\lambda \in P$, $M \in \Phi N_\lambda$ et $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\text{dR}})$ définissent un $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module filtré $M_{\mathcal{L}}^\lambda$ qui, s'il est (faiblement) admissible⁽⁷⁾, définit $V_{M, \mathcal{L}}^\lambda$, une L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, par (*cf.* [13]) :

$$(1.2) \quad V_{M, \mathcal{L}}^\lambda := \mathbf{V}_{\text{st}}(M_{\mathcal{L}}^\lambda[1]) := (M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} \mathbf{B}_{\text{st}})^{\varphi=p} \cap \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\text{dR}}),$$

⁽²⁾Pour $M \in \Phi N_\lambda$ non cuspidal on dira simplement que M est spécial, sous-entendu non exceptionnel. La distinction entre $\widetilde{\Phi N}_\lambda$ et ΦN_λ apparaît surtout pour la fluidité de l'introduction. Dans la suite on utilisera surtout ΦN_λ puisque les représentations exceptionnelles apparaissent par déformation des représentations spéciales non exceptionnelles.

⁽³⁾Ce n'est pas la définition « usuelle » de la correspondance de Langlands locale (*cf.* [7, VI 6. 11]).

⁽⁴⁾Il faut ici supposer que L est assez grand pour que JL_M soit défini sur L .

⁽⁵⁾On n'a pas recours ici à l'abus de notation dans [26] où le type d'une représentation exceptionnelle est donné par $M \in \Phi N_\lambda$.

⁽⁶⁾Pour D un φ -module et $k \in \mathbb{Z}$ on note $D[k]$ le module D muni du frobenius $p^k \varphi$.

⁽⁷⁾Si M est cuspidal alors $M_{\mathcal{L}}^\lambda$ est admissible pour tout $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\text{dR}})$, si M est spécial il existe un seul $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\text{dR}})$ tel que $M_{\mathcal{L}}^\lambda$ n'est pas admissible et si M est exceptionnel tous les $M_{\mathcal{L}}^\lambda$ admissibles sont isomorphes.

et $V = V_{M,\mathcal{L}}^\lambda$, ce qui permet de reconstruire V à partir de $(M, \lambda, \mathcal{L})$. De plus, $V_{M,\mathcal{L}}^\lambda$ est de déterminant $\zeta_M^\lambda \omega$.

La correspondance de Langlands p -adique (*cf.* [7]), $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associe une L -représentation de Banach unitaire admissible de G à V une L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2. Si $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$ ce foncteur établit une bijection entre les L -représentations absolument irréductibles V de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de type (M, λ) et les complétés admissibles unitaires irréductibles de LL_M^λ (*cf.* [12]) qui sont définis par $\mathbf{\Pi}_{M,\mathcal{L}}^\lambda := \mathbf{\Pi}(V_{M,\mathcal{L}}^\lambda)$. Si M est cuspidal (*resp.* spécial, exceptionnel), on dit que $\mathbf{\Pi}_{M,\mathcal{L}}^\lambda$ est *cuspidale* (*resp.* *spéciale*, *exceptionnelle*).

Réiproquement, Colmez construit (*cf.* [7]) un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ qui associe à une L -représentation unitaire admissible de G une L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2. Ces foncteurs satisfont $\mathbf{V} \circ \mathbf{\Pi} = \mathrm{id}$, ce qui signifie que $\mathbf{\Pi}(V)$ caractérise entièrement V .

1.2.2. Blocs et anneaux de déformations. — Soit $\zeta: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow O_L^\times$ un caractère lisse unitaire. Notons $\mathrm{Tors} G$ (*resp.* $\mathrm{Tors}^\zeta G$) la catégorie abélienne des O_L -représentations lisses de longueur finie (et de caractère central ζ). On définit sur $\mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^\zeta G)$, l'ensemble des k_L -représentations irréductibles de $\mathrm{Tors}^\zeta G$, la relation d'équivalence \sim engendrée par

$$\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^\zeta G) \quad \mathrm{Ext}^1(\pi, \pi') = 0 \implies \pi \sim \pi',$$

et on appelle *bloc (absolu)* de $\mathrm{Tors} G$ (*resp.* $\mathrm{Tors}^\zeta G$) une classe d'équivalence de $\mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^\zeta G)$ pour cette relation. La théorie de Gabriel (*cf.* [19]) fournit une décomposition suivant les blocs

$$\mathrm{Tors}^\zeta G = \prod_{\mathcal{B}} \mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}^\zeta G,$$

où $\mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}^\zeta G \subset \mathrm{Tors}^\zeta G$ est la sous-catégorie pleine des O_L -représentations de $\mathrm{Tors}^\zeta G$ dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont dans \mathcal{B} . Dans [22], Paškūnas décrit les blocs \mathcal{B} de cette catégorie (*cf.* n° 3.2.3). La correspondance de Langlands p -adique semi-simple modulo p s'énonce alors comme une bijection (*cf.* [23]):

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Blocs absolues de} \\ \mathrm{Tors} G \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} k_L\text{-représentations} \\ \text{continues semi-simples de } \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \\ \text{de dimension 2} \end{array} \right\} \\ \mathcal{B} & \mapsto & \bar{\rho}_{\mathcal{B}} \end{array}$$

On fixe un bloc \mathcal{B} et soit $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$ la k_L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ associée. On note $R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta}$ l'anneau de déformation du pseudo-caractère ($\mathrm{tr} \bar{\rho}_{\mathcal{B}}, \det \bar{\rho}_{\mathcal{B}}$) et de déterminant $\zeta \omega$. Pour $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$, Kisin (*cf.* [20]) construit un quotient $R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta} \twoheadrightarrow R_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+}$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta}[1/p]$, dont on note L_x le corps résiduel, le morphisme $R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta} \rightarrow L_x$ se factorise par $R_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+} \rightarrow L_x$ si et seulement si la L_x -représentation définie par $R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta} \rightarrow L_x$ est, soit de type (M, λ) , ou bien de type (M', λ) où M' est le L -($\varphi, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$)-module M muni de la monodromie $N = 0$ (*cf.* la remarque 2.38). On note $\rho_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+}: \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(R_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+})$ la $R_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+}$ -représentation universelle de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

On pose

$$R_{\mathcal{B},M}^\lambda := R_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+}[\frac{1}{p}], \quad \rho_{\mathcal{B},M}^\lambda := \rho_{\mathcal{B},M}^{\lambda,+}[\frac{1}{p}], \quad X_{\mathcal{B},M}^\lambda := \mathrm{Spec} R_{\mathcal{B},M}^\lambda.$$

Soit $\lambda \in P$, $M \in \Phi N_\lambda$ et \mathcal{B} un bloc de $\mathrm{Tors}^{\zeta_M^\lambda} G$ où l'on rappelle que ζ_M^λ est le caractère central de LL_M^λ (et de JL_M^λ).

- La correspondance de Langlands p -adique en famille (*cf.* la définition 3.1) permet d'associer à $\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda$ une $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ -représentation topologique $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)$. On note $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)'$ son L -dual stéréotypique⁽⁸⁾. Pour $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel, on note ρ_x la L_x -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ donnée par \mathfrak{m}_x . La représentation $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)$ interpole les

⁽⁸⁾C'est le L -dual continu pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées, *i.e.* la dualité pour laquelle les espaces de Banach et de Fréchets sont réflexifs.

$\mathbf{\Pi}(\rho_x)$ au sens où $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)'$ $\otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} L_x \cong \mathbf{\Pi}(\rho_x)'$, c'est-à-dire que les $\mathbf{\Pi}(\rho_x)'$ sont des quotients de $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)'$.

- On définit $\widehat{\text{LL}}_M^\lambda$ le *complété unitaire universel* de LL_M^λ (cf. [8]) et on choisit un \mathcal{O}_L -réseau $\widehat{\text{LL}}_M^{\lambda,+} \subset \widehat{\text{LL}}_M^\lambda$. Le *complété \mathcal{B} -adique* (cf. [10] et n° 2.4.1) $\text{LL}_{M,\mathcal{B}}^{\lambda,+}$ de $\text{LL}_M^{\lambda,+}$ est défini comme la limite projective de ses quotients de longueur finie contenus dans $\text{Tors}_\mathcal{B}^{\zeta_M^\lambda} G$. En particulier,

$$\widehat{\text{LL}}_M^{\lambda,+} = \prod_{\mathcal{B}} \text{LL}_{M,\mathcal{B}}^{\lambda,+},$$

et on pose $\text{LL}_{M,\mathcal{B}}^\lambda := \text{LL}_{M,\mathcal{B}}^{\lambda,+} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$.

1.2.3. Cohomologie du système local p -adique. — Le *demi-plan p -adique de Drinfeld* est défini comme

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p} := \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\text{an}} \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p),$$

en tant que \mathbb{Q}_p -espace rigide analytique. Le groupe G agit par homographie sur $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}$ et \check{G} agit trivialement. Posons

$$\mathbb{G} := G \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \times \check{G}.$$

Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant une extension quadratique de \mathbb{Q}_p , on définit ${}^p M_K^0 := \mathbb{H}_K \times \mathbb{Z}/2$ qui est muni d'une action de \mathbb{G} où l'action sur $\mathbb{Z}/2$ est donnée par $+v_p(\det(g))$ pour $g \in G$, par le quotient non ramifié $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ pour $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et par $+v_p(\text{ndr}(\check{g}))$ pour $\check{g} \in \check{G}$. Par convention, pour toute extension finie K de \mathbb{Q}_p , on définit ${}^p M_K^n$ par descente galoisienne à partir d'une extension quadratique de K . Le théorème de Drinfeld (cf. [16]) fournit une application surjective

$$(1.4) \quad \pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}) \twoheadrightarrow \check{G}^+ \subset \check{G},$$

où $\check{G}^+ := \mathcal{O}_D^\times$. On peut alors associer à ${}^p M_K^n$ des revêtements étals et des systèmes locaux.

- Pour $n \geq 1$, le sous-groupe $\check{G}_n^+ := 1 + \varpi_D^n \mathcal{O}_D \subset \check{G}^+$ définit un revêtement étale galoisien ${}^p M_K^n \rightarrow {}^p M_K^0$. Pour $K = \mathbb{Q}_p$ c'est un revêtement de groupe de Galois⁽⁹⁾ $\check{G}^+/\check{G}_n^+$. On obtient ainsi une action de \mathbb{G} sur ${}^p M_K^n$.
- Pour $\lambda \in P_+$, la L -représentation \check{W}_λ (cf. (1.1)) de \check{G} contient un réseau stable \check{W}_λ^+ et la surjection (1.4) permet de définir une \mathcal{O}_L -représentation de $\pi_1^{\text{ét}}({}^p M_K^n)$, c'est-à-dire (cf. [14]), un \mathcal{O}_L -système local étale \mathbb{V}_λ^+ et son L -système local associé $\mathbb{V}_\lambda := \mathbb{V}_\lambda^+ \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ sur ${}^p M_K^n$.

On veut calculer la cohomologie étale du système local

$$\text{Sym}\mathbb{V}(1) := \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{V}_\lambda(1) \otimes_L \check{W}_\lambda,$$

où (1) désigne la torsion par le caractère cyclotomique. Dans [26], on donne une interprétation de ce système local comme l'algèbre symétrique du module de Tate du \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur ${}^p M_K^n$. On n'utilisera pas cette interprétation ici. On pose

$$H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \text{Sym}\mathbb{V}(1)) := \bigoplus_{\lambda \in P_+} H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \mathbb{V}_\lambda(1)) \otimes_L \check{W}_\lambda,$$

$$H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \mathbb{V}_\lambda(1)) := \left(\varprojlim_n \varinjlim_{[K : \mathbb{Q}_p] < \infty} H_{\text{ét}}^1({}^p M_K^n ; \mathbb{V}_\lambda^+(1)/p^n) \right) \otimes_{\mathcal{O}_L} L.$$

Rappelons que dans [26], nous avons montré comment les L -représentations $V_{M,\mathcal{L}}^\lambda$ et $\Pi_{M,\mathcal{L}}^\lambda$ apparaissent par entrelacement dans la cohomologie de ${}^p M_C^n$ à coefficients dans $\text{Sym}\mathbb{V}(1)$. Il

⁽⁹⁾De plus si K est assez grand c'est un revêtement de groupe de Galois $\check{G}^1/\check{G}_n^1$ où $\check{G}^1 := \ker \text{ndr}$ est le noyau de la norme réduite et $\check{G}_n^1 := \check{G}^1 \cap \check{G}_n^+$.

s'agit ici d'utiliser ce résultat pour obtenir une description complète de la cohomologie de ${}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n$ à coefficients dans $\text{Sym} \mathbb{V}(1)$.

1.3. Plan de l'article. — Après cette introduction, l'article est constitué de deux sections. La seconde section est consacrée à la preuve du théorème 1.2 qui est ensuite utilisée pour démontrer le théorème 1.1.

- Dans la section 2, après avoir énoncé le résultat principal, on commence, (*cf.* n° 2.1), par quelques rappels sur les représentations spéciales et on construit un réseau dans le complété unitaire universel de la Steinberg localement algébrique (*cf.* n° 2.1.3). On calcule alors les déformations de Rham infinitésimales universelles des représentations spéciales (*cf.* n° 2.2 et n° 2.3) avant d'en déduire les complétés de longueur finie de la Steinberg localement algébrique (*cf.* la proposition 2.27). On utilise ensuite ces résultats pour déterminer les anneaux locaux complétés de l'anneau de Kisin (*cf.* n° 2.4.3) après avoir rappelé quelques propriétés des \mathcal{B} -complétés (*cf.* n° 2.4). Finalement, ceci permet de définir une application analytique de l'analytifié du spectre de l'anneau de Kisin vers la droite projective et de montrer que cet application est une immersion ouverte (*cf.* n° 2.4.4), ce qui achève la preuve du théorème (*cf.* n° 2.5).
- Dans la section 3, on commence par définir les derniers termes de l'énoncé du théorème 1.1. On complète ensuite certains résultats de [26], notamment les théorèmes de finitude (*cf.* n° 3.1.3) et le passage de \check{M}_C^n à ${}^p M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^n$ (*cf.* n° 3.1.4). On démontre ensuite la décomposition en blocs au niveau entier (*cf.* n° 3.2.2). Enfin, après quelques lemmes techniques (*cf.* n° 3.2.3 et le lemme 3.21), on termine la preuve du théorème 1.1 au n° 3.2.4.

1.4. Remerciements. — Je tiens à remercier Colmez, Dospinescu et Nizioł; il est évident que ce travail leur doit énormément. Je remercie le Morningside Center of Mathematics de la Chinese Academy of Sciences, où ce travail a été réalisé, pour ses excellentes conditions de travail. Je remercie particulièrement Zicheng Qian pour de nombreuses discussions éclairantes.

2. Anneaux de Kisin

Soit $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$. Si M est spécial supposons de plus que $w(\lambda) > 1$.

$$(2.1) \quad T_{M,\mathcal{B}}^\lambda := \text{End}(\text{LL}_{M,\mathcal{B}}^\lambda), \quad Y_{M,\mathcal{B}}^\lambda := \text{Spec}(T_{M,\mathcal{B}}^\lambda), \quad \sigma_{M,\mathcal{B}}^\lambda := \mathbf{V}(\text{LL}_{M,\mathcal{B}}^\lambda).$$

On veut démontrer que $T_{M,\mathcal{B}}^\lambda$ est un anneau de déformation et que $\sigma_{M,\mathcal{B}}^\lambda$ est la famille universelle sur ce dernier. Le théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.1. —

1. L'anneau $T_{M,\mathcal{B}}^\lambda$ s'identifie aux fonctions bornées sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$: algébriquement, c'est le produit d'anneaux principaux.
2. On a un isomorphisme d'anneaux $R_{\mathcal{B},M}^\lambda \cong T_{M,\mathcal{B}}^\lambda$. De plus $\sigma_{\mathcal{B}}^\lambda$ est canoniquement isomorphe à la représentation universelle sur $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$, i.e. $\sigma_{M,\mathcal{B}}^\lambda \cong \rho_{\mathcal{B},M}^\lambda$.

Remarque 2.2. —

- Quitte prendre L plus grand, on peut supposer que tous blocs sont absous (*cf.* [10, Remarque 1.9]), ce que l'on fera dans toute la suite.
- Pour M cuspidal, ce théorème est démontré dans [10]. Dans la section 2, on traite le cas où M est spécial par les mêmes méthodes.
- La difficulté principale provient de la *représentation exceptionnelle* qui correspond à l'idéal maximal de $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$, pour M spécial et \mathcal{B} un bloc précis, pour lequel la représentation associée est cristalline. La raison est que cette représentation admet une déformation cristalline et on doit montrer qu'elle n'apparaît pas dans $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$.

- Pour M spécial et $w(\lambda)$ satisfaisant $1 \leq w(\lambda) \leq p-1$, en utilisant les résultats de Chitao et Ghate (*cf.* [4]) on peut déterminer explicitement l'ouvert $(X_{\mathcal{B},M}^\lambda)^{\text{an}}$.
- Dans le cas où $w(\lambda) = 1$, la convention sera que $R_{\mathcal{B},M}^\lambda = L$ pour le bloc de la steinberg, auquel cas $\rho_{M,\mathcal{B}}^\lambda = \zeta_M^\lambda \omega$, et $R_{\mathcal{B},M}^\lambda = 0$ sinon.

Le but de cette section est donc de démontrer la proposition dans le cas où M est spécial, *i.e.* $M = \text{Sp}(|\lambda| - 2)$ (*cf.* n° 2.1.1). Dans ce cas, $\text{LL}_M^\lambda = \text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$.

Soit $\zeta: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$ un caractère unitaire, que l'on voit comme un caractère de G en précomposant avec le déterminant, et comme un caractère $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ en précomposant avec morphisme de réciprocité. Alors on définit

- $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta}$ l'anneau de pseudo-déformation universel de $(\text{tr}\bar{\rho}_{\mathcal{B}}, \det\bar{\rho}_{\mathcal{B}})$ de déterminant $\zeta\omega$,
- $Z_{\mathcal{B}}^\zeta$ le centre de la catégorie abélienne $\text{Tors}_{\mathcal{B}}^\zeta G$.

L'un des outils principaux est le théorème de type $R = T$ de Paškūnas et Tung⁽¹⁰⁾, (*cf.* [24]):

Théorème 2.3. — Soit $\zeta: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow O_L^\times$ un caractère lisse. Il existe un unique isomorphisme

$$\iota_{\mathcal{B}}^\zeta: R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta} \xrightarrow{\sim} Z_{\mathcal{B}}^\zeta.$$

Remarque 2.4. — Il n'est pas clair comment déduire, dans le cas spécial, la conjecture de Breuil-Mézard des résultats de cette section, comme dans [10]. L'une des raisons est que la réduction modulo ϖ_L du réseau que l'on construit au n° 2.1.3 n'est *a priori* pas semi-simple⁽¹¹⁾. Dans l'énoncé de [10, Proposition 5.9] et sa preuve, il est implicitement utilisé que l'on peut choisir un réseau dans un K -type cuspidal dont la réduction modulo ϖ_L soit semi-simple, ce qui permet la décomposition en somme directe.

2.1. La série spéciale p -adique. —

2.1.1. Définition des représentations spéciales. — Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier, on définit le L -(φ, N)-module spécial $\text{Sp}_L(k)$ comme le L -espace vectoriel $\text{Sp}_L(k) = Le_0 \oplus Le_1$ muni des endomorphismes

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}} e_1 \\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}} e_0, \end{cases} \quad \begin{cases} Ne_1 = e_0 \\ Ne_0 = 0, \end{cases}$$

qui est de pente $-\frac{k}{2}$. Tout L -($\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$)-module spécial non exceptionnel est de la forme $(\text{Sp}_L(k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}) \otimes_L \chi$ pour $\chi: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$ un caractère lisse (*cf.* la preuve de [25, Proposition 1.3]).

Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier, on définit le L -(φ, N)-module exceptionnel $\widetilde{\text{Sp}}_L(k)$ comme le L -espace vectoriel $\widetilde{\text{Sp}}_L(k) = Le_0 \oplus Le_1$ muni des endomorphismes

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}} e_1 \\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}} e_0, \end{cases} \quad \begin{cases} Ne_1 = 0 \\ Ne_0 = 0, \end{cases}$$

C'est-à-dire que $\widetilde{\text{Sp}}_L(k)$ est le φ -module $\text{Sp}_L(k)$ avec $N = 0$; sa pente est également $-\frac{k}{2}$. Tout L -($\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$)-module exceptionnel est de la forme $(\widetilde{\text{Sp}}_L(k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}) \otimes_L \chi$ pour un caractère lisse $\chi: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$.

Soit $\lambda \in P_+$ et $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$.

⁽¹⁰⁾Comme on a fait l'hypothèse $p > 3$, c'est en fait [22] que l'on utilise. Comme suggéré dans [11], il est possible que cette hypothèse soit superflue, même s'il n'est pas tout à fait clair pour nous comment adapter certains arguments.

⁽¹¹⁾Pour un K -type de la forme $\tau \otimes W$ avec τ lisse et W algébrique, sa réduction modulo ϖ_L n'est *a priori* pas semi-simple.

- Si $\mathcal{L} \in L$, on définit $D_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ le L -(φ, N)-module filtré dont le L -(φ, N)-module sous-jacent $\mathrm{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ et muni de la filtration

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \begin{cases} D_{\mathcal{L}}^{\lambda} & \text{si } i \leq -\lambda_2 + 1, \\ L(e_1 - \mathcal{L}e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leq i \leq -\lambda_1 + 1, \\ 0 & \text{si } -\lambda_1 + 2 \leq i. \end{cases}$$

- Si $\mathcal{L} = \infty$, on définit $D_{\mathcal{L}}^{\lambda} = D_{\infty}^{\lambda}$ comme le L -(φ, N)-module filtré de L -(φ, N)-module sous-jacent $\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(|\lambda|)$ et de filtration

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \begin{cases} D_{\mathcal{L}}^{\lambda} & \text{si } i \leq -\lambda_2 + 1, \\ L(e_1 - e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leq i \leq -\lambda_1 + 1, \\ 0 & \text{si } -\lambda_1 + 2 \leq i. \end{cases}$$

On pose $V_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_{\mathcal{L}}^{\lambda}[1])$ (*cf.* (1.2)), qui est une L -représentation spéciale de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \Pi(V_{\mathcal{L}}^{\lambda})$ qui est une L -représentation spéciale de G . Puisque $w(\lambda) > 1$, ces représentations sont absolument irréductibles ; $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ est de caractère central⁽¹²⁾ $\zeta_{\lambda} := \omega^{|\lambda|-1}$ et $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ est de déterminant $\zeta_{\lambda}\omega = \omega^{|\lambda|}$.

2.1.2. Complété unitaire universel de $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$. — Soit $\mathcal{C}^{\lambda} := \widehat{\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}}$ le complété unitaire universel de $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$. On connaît cet espace explicitement, en termes de fonctions de classe $\mathcal{C}^{u(\lambda)}$, où l'on définit $u(\lambda) := \frac{w(\lambda)-1}{2}$.

En effet, on définit \mathcal{C}^{λ} comme le quotient $\mathcal{C}^{\lambda} := \widetilde{\mathcal{C}}^{\lambda}/W_{\lambda}^*$ où $\widetilde{\mathcal{C}}^{\lambda} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}_p, L)$ est le sous-espace des fonctions $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow L$ de classe $\mathcal{C}^{u(\lambda)}$ (*cf.* [5, I.5] pour la définition) et la fonction $x \mapsto x^{w(\lambda)-1}f(1/x)$ s'étend en une fonction de classe $\mathcal{C}^{u(\lambda)}$ sur \mathbb{Q}_p et $W_{\lambda}^* \subset \widetilde{\mathcal{C}}^{\lambda}$ est le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $w(\lambda) - 1$. L'action de G sur $\widetilde{\mathcal{C}}^{\lambda}$ est définie par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad (g \star_{\lambda} f)(x) = |\det(g)|^{\frac{|\lambda|-1}{2}} (cx + d)^{w(\lambda)-1} f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)$$

Pour $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L)$, $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \geq 1$ un entier, on définit la fonction $f_{\mathcal{L},a}^n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}_p, L)$ par

$$x \mapsto f_{\mathcal{L},a}^n(x) := (x - a)^n \log_{\mathcal{L}}(x - a)$$

où si $\mathcal{L} = \infty$ on pose $\log_{\infty} = v_p$.

De plus, pour $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$, on définit $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}_p, L)$ le sous-espace engendré par les fonctions $h: \mathbb{Q}_p \rightarrow L$ de la forme

$$h = \sum_{i \in I} \lambda_i f_{\mathcal{L},a_i}^{n_i},$$

où I est un ensemble fini, et pour tout $i \in I$, $n_i \geq 1$ est un entier, $\lambda_i \in L$ et $a_i \in \mathbb{Q}_p$, tels que

- pour tout $i \in I$, $u(\lambda) < n_i \leq w(\lambda)$,
- $\deg((\sum_{i \in I} \lambda_i(x - a_i)^{n_i}) < u(\lambda))$.

En d'autres termes, $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{Q}_p, L)$ est l'espace des fonctions qui sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $f_{\mathcal{L},a}^n$ avec $u(\lambda) < n \leq w(\lambda)$ et qui ont un pôle d'ordre $< u(\lambda)$ en ∞ (*cf.* [6, V.1., 3]).

Lemme 2.5. — *On a $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \widetilde{\mathcal{C}}_{\lambda}$. On note $M_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ l'image de $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ dans \mathcal{C}^{λ} et $\widehat{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ l'adhérence de $M_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ dans \mathcal{C}^{λ} . On a une suite exacte de L -représentations de Banach unitaires de G*

$$0 \rightarrow \widehat{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \rightarrow \mathcal{C}^{\lambda} \rightarrow \Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Ces résultats sont dus à Breuil, *cf.* [3, Lemme 3.3.2] pour le fait que $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \widehat{\mathcal{C}}_{\lambda}$ et [3, Corollaire 3.3.4] pour la suite exacte. \square

⁽¹²⁾Pour $M = \mathrm{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ (ou $M = \widetilde{\mathrm{Sp}}_L(|\lambda| - 2)$), $\zeta_{\lambda} := \zeta_M^{\lambda}$ défini dans l'introduction.

On finit ce numéro par trois énoncés pratiques sur \mathcal{C}^λ . On note \mathcal{D}^λ le dual (stéréotypique) de \mathcal{C}^λ . La preuve du lemme suivant est exactement celle de [11, Lemme 5.3 b)] :

Lemme 2.6. — *Les vecteurs G -bornés de $(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$ et de $(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lan}})'$ sont isomorphes à \mathcal{D}^λ .*

On calcule les vecteurs localement algébriques de \mathcal{C}^λ :

Proposition 2.7. — $\mathrm{End}_{L[G]}(\mathcal{C}^\lambda) = L$

Démonstration. — Soit $\pi := \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$, alors π est dense dans $\widehat{\pi}$ et comme $\mathrm{End}_{L[G]}(\pi) = L$ par le lemme de Schur classique, il suffit de prouver que $\widehat{\pi}^{\mathrm{lalg}} = \pi$ pour conclure. Mais puisque $\widehat{\pi} \cong \mathcal{C}^\lambda$, et les vecteurs localement algébriques de $\mathcal{C}^{u(\lambda)}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), L)$ sont $\mathcal{C}^{\mathrm{lalg}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), L) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), L) \otimes W_\lambda^*$, donc on a $(\mathcal{C}^\lambda)^{\mathrm{lalg}} \cong \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$. \square

On caractérise les quotients de \mathcal{C}^λ de longueur finie comme complétés de \mathcal{C}^λ de longueurs finies.

Proposition 2.8. — *Soit Π une L -représentation unitaire de G de longueur finie. Alors Π est un quotient de \mathcal{C}^λ si et seulement si on a un morphisme $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \hookrightarrow \Pi$ d'image dense.*

Démonstration. — Si Π est un quotient de \mathcal{C}^λ , puisque par la propriété universelle on a

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{C}^\lambda, \Pi) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}, \Pi)$$

alors on a une application $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \rightarrow \Pi$ nécessairement injective puisque $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est irréductible et d'image dense par définition du complété unitaire universel.

Réciproquement, on obtient une application $\mathcal{C}^\lambda \rightarrow \Pi$ dont on doit montrer la surjectivité. Comme pour la preuve de [10, Proposition 3.2], c'est une conséquence du fait que Π est résiduellement de longueur finie (*c.f.* [12]). \square

2.1.3. Réseau de \mathcal{C}^λ

Dans ce numéro, on construit un réseau de $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ dont le complété p -adique est un réseau dans \mathcal{C}^λ . Posons $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \subset G$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori (*i.e.* le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p) et $Z \subset G$ le centre de G . De plus, on note $N := N_G(IZ)$ le normalisateur de IZ et KN sont produit avec K . On a

$$w_p := \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = IZ \sqcup w_p IZ, \quad KN = KZ \sqcup w_p KZ$$

Pour $\lambda \in P$, on a une O_L -représentation localement algébrique de G de dimension finie

$$W_\lambda^{+,*} := \mathrm{Sym}_{O_L}^{w(\lambda)-1} \otimes_{O_L} \det^{\lambda_1} \otimes_{O_L} |\det|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

C'est un O_L -réseau de W_λ^* stable par KN . Posons

$$\mathcal{I}_0^{\lambda,+} := \mathrm{ind}_{KZ}^G W_\lambda^{(+,*)}, \quad \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} := \mathrm{ind}_{IZ}^G W_\lambda^{(+,*)}$$

où les induites sont compactes. Alors $\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+}$ est un O_L -réseau G -stable de $\tilde{\mathcal{I}}_1^\lambda$ et $\mathcal{I}_0^{\lambda,+}$ est un O_L -réseau G -stable de \mathcal{I}_0^λ . L'action de $w_p \in G$ définit une involution $\Pi: \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+}$ par $\Pi(f) = f \circ w_p$. Ainsi, on définit $\mathcal{I}_1^{\lambda,+} := (\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+})^{\Pi=-\mathrm{id}}$, de sorte que l'on a

$$\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} = \mathcal{I}_1^{\lambda,+} \oplus (\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+})^{\Pi=\mathrm{id}}.$$

La projection $\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \rightarrow \mathcal{I}_1^{\lambda,+}$ est donnée par $\Pi_- := \mathrm{id} - \Pi$.

Proposition 2.9. — *On a une surjection G -équivariante $\mathcal{I}_1^\lambda \twoheadrightarrow \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ telle que si l'on note $I^{\lambda,+}$ l'image de $\mathcal{I}_1^{\lambda,+}$ par cette surjection, qui définit un réseau de $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$, alors le complété p -adique de $I^{\lambda,+}$ définit un réseau de \mathcal{C}^λ , i.e.*

$$\mathcal{C}^\lambda = (\varprojlim_n I^{\lambda,+}/p^n) \otimes_{O_L} L.$$

Remarque 2.10. — Notons que la surjection $\mathcal{I}_1^\lambda \twoheadrightarrow \text{St}_\lambda^{\text{alg}}$ est exactement celle obtenue par Chitao et Ghate [4, §4]. Notre preuve est légèrement différente et repose (de manière caché à travers [1]) sur l’isomorphisme $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}) \cong (\text{St}_L^\infty)'$ alors que le calcul de Chitao et Ghate est explicite.

Commençons par expliciter le réseau $I^{\lambda,+}$. Soit $\text{st}_{(0,1)}^+ := \mathcal{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), O_L)/O_L$ la O_L -représentation de Steinberg finie, que l’on considère comme une O_L -représentation de KZ par inflation. Pour $\lambda \in P$, posons

$$\text{st}_\lambda^+ := \text{st}_{(0,1)}^+ \otimes_{O_L} W_\lambda^{*,+}.$$

Comme $KZ/I\mathcal{Z} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, on obtient $\text{ind}_{KZ}^{KZ} W_\lambda^{*,+} \cong \mathcal{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), W_\lambda^{*,+})$ et donc en appliquant le foncteur exact ind_{KZ}^G à la suite exacte

$$0 \rightarrow W_\lambda^{*,+} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), W_\lambda^{*,+}) \rightarrow \text{st}_\lambda^+ \rightarrow 0,$$

on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_0^{\lambda,+} \xrightarrow{\text{ind}_{KN}^G \iota} \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \text{st}_\lambda^+ \rightarrow 0,$$

et l’on obtient un diagramme commutatif définissant $I^{\lambda,+}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_0^{\lambda,+} & \xrightarrow{\text{ind}_{KZ}^G \iota} & \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} & \longrightarrow & \text{ind}_{KZ}^G \text{st}_\lambda^+ \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \Pi_- & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_0^{\lambda,+} & \xrightarrow{\partial^+} & \mathcal{I}_1^{\lambda,+} & \longrightarrow & I^{\lambda,+} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Plus exactement on définit ∂^+ comme la composée $\mathcal{I}_0^{\lambda,+} \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_0^{\lambda,+} \xrightarrow{\text{ind}_{KZ}^G \iota} \tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \xrightarrow{\Pi_-} \mathcal{I}_1^{\lambda,+}$ et $I^{\lambda,+} := \mathcal{I}_1^{\lambda,+}/\partial^+(\mathcal{I}_0^{\lambda,+})$. On définit finalement $\partial = \partial^+ \otimes_{O_L} L: \mathcal{I}_0^\lambda \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_0^\lambda$. Notons que $(\tilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+})^{\Pi=\text{id}} = \text{ind}_N^G W_\lambda^{+,*}$ et donc

$$(2.2) \quad \text{ind}_{KZ}^G \text{st}_\lambda^+ = \text{ind}_N^G W_\lambda^{+,*} \oplus I^{\lambda,+}$$

en particulier, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.11. — Le $k_L[G]$ -module lisse $I^{\lambda,+}/\varpi_L$ est de type fini.

On peut expliciter ∂^+ (*resp.* ∂) en interprétant les éléments des induites comme des fonctions. Notons $\tilde{s}: G/I\mathcal{Z} \rightarrow G/KZ$ la projection canonique et $\tilde{t} = \tilde{s} \circ w_p: G/I\mathcal{Z} \rightarrow G/KZ$. L’application $\text{ind}_{KN}^G \iota$ est explicitement donnée sur $f \in \mathcal{I}_0^{\lambda,+}$, vu comme fonction sur G/KZ , pour $a \in G/I\mathcal{Z}$ par

$$(\text{ind}_{KZ}^G \iota)(f)(a) = f(\tilde{s}(a)).$$

Ainsi, pour $a \in G/I\mathcal{Z}$,

$$(2.3) \quad \partial^+(f)(a) = f(\tilde{s}(a)) - f(\tilde{t}(a)).$$

La preuve de la proposition 2.9 se fait par dualité. On note Ind l’induite sans condition sur le support. On commence par le lemme classique suivant, dont on esquisse une démonstration pour le confort du lecteur.

Lemme 2.12. — Soit $H \subset G$ un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre et soit σ^+ une O_L -représentation localement algébrique de H , libre et de rang finie sur O_L . Notons $\sigma = \sigma^+ \otimes_{O_L} L$, alors

1. $(\text{Ind}_H^G \sigma)$ est naturellement un espace de Fréchet et $(\text{Ind}_H^G \sigma)' \cong \text{ind}_H^G \sigma^*$,
2. $(\text{Ind}_H^G \sigma^+)' \cong \widehat{\text{ind}_H^G \sigma^{*,+}}$, où le complété à droite est p -adique,
3. $(\text{Ind}_H^G \sigma)^{G-\text{b}} \cong \text{Ind}_H^G \sigma^+ \otimes_{O_L} L$.

Démonstration. — Posons $V = (\text{Ind}_H^G \sigma)$ et $W = \text{ind}_H^G \sigma^*$. Comme G/H est dénombrable, $V \cong L^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans L , qui est un espace de Fréchet et $W \cong L^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites à valeurs dans L à support compact, qui est un espace de type LB (limite inductive d'espaces de Banach). Comme $L^{(\mathbb{N})}$ est le L -dual stéréotypique de $L^{\mathbb{N}}$ on obtient sans peine que $V' \cong W$.

Pour le second point posons $V^+ = \text{Ind}_H^G \sigma^+$ et $W^+ = \text{ind}_H^G \sigma^{*,+}$. Alors $V^+ \otimes L \subset V \cong L^{\mathbb{N}}$ s'identifie aux suites bornées à valeur dans L qui est un espace de Smith (dual stéréotypique d'un banach). Ainsi, son dual s'identifie au L -banach

$$\left(\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} O_L \right) \otimes_{O_L} L = \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} L,$$

où le complété est pour la norme p -adique, des suites de limite nulle. On en déduit que $(V^+ \otimes_{O_L} L)' \cong \widehat{W}^+ \otimes_{O_L} L$ et comme cet isomorphisme identifie les boules unités on a $V^+ \cong \widehat{W}^+$.

Pour le dernier point, il suffit de remarquer que comme l'action de G sur G/H est transitive, $f \in V$, identifié à une fonction sur G/H , est G -bornée si et seulement si l'ensemble $\{f(s)\}_{s \in G/H}$ est borné, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $p^n f \in V^+$, i.e. $f \in V^+ \otimes_{O_L} L$. Ceci démontre le dernier point. \square

Posons

$$\mathcal{J}_0^{\lambda,+} := \text{Ind}_{KZ}^G W_\lambda^{(+)}, \quad \tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+} := \text{Ind}_{IZ}^G W_\lambda^{(+)},$$

où les induites sont les induites classiques (sans condition sur le support). Comme précédemment, on définit $\Pi: \tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+}$ la précomposition par w_p et on pose $\mathcal{J}_1^{\lambda,+} := (\tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+})^{\Pi=-\text{id}}$ de sorte que

$$\tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+} := \mathcal{J}_1^{\lambda,+} \oplus (\tilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,+})^{\Pi=\text{id}}.$$

On commence par réinterpréter ces espaces en termes de fonctions sur l'arbre de Bruhat-Tits. Soit \mathcal{T}_\bullet l'arbre de Bruhat-Tits, le graphe défini par $\mathcal{T}_0 = G/KZ$ et $\mathcal{T}_1 = G/N$ et muni des deux flèches $s, t: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_0$ source et but que l'on va expliciter. La décomposition de Bruhat donne

$$G = P^+ KZ \sqcup w_p P^+ KZ, \quad P^+ := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme l'application $G/IIZ \rightarrow G/N$ est d'ordre 2, tout élément $a \in G/N$ a pour antécédents $\{\tilde{a}, w_p \tilde{a}\} \subset G/IIZ$ choisis tels que $\tilde{a} \in P^+ KZ$. On pose alors

$$s(a) := \tilde{s}(\tilde{a}), \quad t(a) := \tilde{t}(\tilde{a}) = \tilde{s}(w_p \tilde{a}).$$

L'idée étant que l'on peut considérer G/IIZ comme l'ensemble des arêtes dédoublées et \tilde{s}, \tilde{t} définissant une structure de graphe non orienté⁽¹³⁾ sur l'arbre de Bruhat-Tits. De plus, on obtient

$$\mathcal{J}_i^\lambda \cong \mathcal{C}(\mathcal{T}_i, W_\lambda),$$

où pour $i = 1$ cet isomorphisme identifie les fonctions impaires sur les arêtes non orientées G/IIZ (au sens où changer le sens de l'arête change le signe de la fonction sur cette arête) aux fonctions sur les arêtes orientées. Le laplacien $\Delta: \mathcal{J}_1^\lambda \rightarrow \mathcal{J}_0^\lambda$ est défini sur $f \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_1, W_\lambda)$ pour $s \in \mathcal{T}_0$ par

$$(\Delta f)(s) := \sum_{\substack{a \in \mathcal{T}_1 \\ s(a)=s}} f(a) - \sum_{\substack{a \in \mathcal{T}_1 \\ t(a)=s}} f(a).$$

On note $\Delta^+: \mathcal{J}_1^{\lambda,+} \rightarrow \mathcal{J}_0^{\lambda,+}$ sa restriction à $\mathcal{J}_1^{\lambda,+}$. Le lemme suivant découle immédiatement du lemme 2.12 et de l'expression (2.3) de ∂ :

⁽¹³⁾Rappelons que si $s, t: G_1 \rightarrow G_0$ est un graphe (orienté) alors on lui associe un graphe non orienté en posant $\tilde{G}_1 := G_1 \sqcup G'_1$ où $G'_1 = G_1$ et $\tilde{s}, \tilde{t}: \tilde{G}_1 \rightarrow G_0$ sont définis par $\tilde{s}|_{G_1} = s$, $\tilde{s}|_{G'_1} = t$, $\tilde{t}|_{G_1} = t$, $\tilde{t}|_{G'_1} = s$

Lemme 2.13. — Pour $i = 0, 1$, on a des isomorphismes L -linéaires topologiques G -équivariants

$$(\mathcal{J}_i^\lambda)' \cong \mathcal{I}_i^\lambda.$$

De plus, sous ces isomorphismes, $\Delta' = \partial$.

Proposition 2.14. — Le laplacien

$$\Delta^{(+)} : \mathcal{J}_1^{\lambda, (+)} \xrightarrow{\Delta^{(+)}} \mathcal{J}_0^{\lambda, (+)},$$

est un morphisme strict surjectif, et de plus :

- $\ker \Delta \cong (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$,
- $(\ker \Delta^+) \otimes_{\mathrm{O}_L} L \cong \mathcal{D}^\lambda$, i.e. $\ker \Delta^+$ définit un réseau de \mathcal{D}^λ .

Démonstration. — Pour la première partie de la proposition, on peut supposer $\lambda = (0, 1)$, quitte à utiliser une base de W_λ et raisonner suivant les coordonnées.

On commence par montrer que Δ est strict pour la topologie faible et donc strict pour la topologie de Fréchet. Soit $s \in \mathcal{T}_0$ et p_s la semi-norme associée, pour $a \in \mathcal{T}_1$, on note de même p_a la semi-norme associée. Alors

$$p_s(\Delta(f)) \leq \sum_{\substack{a \in \mathcal{T}_1 \\ t(a)=s}} |f(a)| - \sum_{\substack{a \in \mathcal{T}_1 \\ s(a)=s}} |f(a)| \leq 2(p+1) \sup_{\substack{a \\ s \in a}} p_a(f)$$

où le sup se prend sur l'ensemble fini des arêtes voisines de s . Ainsi Δ est strict et en particulier d'image fermée (de même pour Δ^+).

Comme $\Delta' = \partial$ par le lemme 2.13, la surjectivité de Δ est une conséquence du lemme 2.12 et de l'injectivité de ∂ . On donne une preuve différente, en particulier pour avoir la surjectivité de Δ^+ . Comme on vient de montrer que l'image est fermée il suffit de montrer que son image contient une partie dense. Soit $s \in \mathcal{T}_0$, on choisit une suite d'arêtes $\{a_n(s)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_1$ telles que $s(a_0) = s$, et pour tout $n \geq 0$, $t(a_n) = s(a_{n+1})$ (i.e. les a_n forment une chaîne partant de s). Posons alors

$$f_s := \sum_{n \geq 0} \delta_{a_n}.$$

où pour une arête $a \in \mathcal{T}_1$ (resp. un sommet $s \in \mathcal{T}_0$), on note δ_a le dirac en a (δ_s le dirac en s). On a alors $\Delta f_s = \delta_s$. Par linéarité, les sommes finies de diracs sont dans l'image et comme ce sous-espace est dense, on a montré que Δ est surjectif (de même⁽¹⁴⁾ pour Δ^+).

Montrons que $\ker \Delta \cong (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$ ce qu'il suffit de faire pour $\lambda = (0, 1)$ quitte à tensoriser par W_λ . C'est alors un résultat classique sur les cochaînes harmoniques pour lequel on renvoie à [1, Theorem 1.1] (cf. aussi [26, Lemme 12.4]).

Comme on sait que \mathcal{D}^λ s'identifie aux vecteurs G -bornés de $(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$ (cf. lemme 2.6), le dernier point est une conséquence du point 3 du lemme 2.12. □

On termine maintenant la preuve de la proposition 2.9.

Démonstration. — On commence par montrer que le conoyau de $\mathcal{I}_0^\lambda \xrightarrow{\partial} \mathcal{I}_1^\lambda$ est isomorphe à $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$. D'après la proposition 2.14 on a une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})' \rightarrow \mathcal{J}_1^\lambda \xrightarrow{\Delta} \mathcal{J}_0^\lambda \rightarrow 0$$

à laquelle on applique le L -dual stéréotypique pour obtenir par le lemme 2.12

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_0^\lambda \xrightarrow{\partial} \mathcal{I}_1^\lambda \rightarrow \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \rightarrow 0.$$

De même, on considère

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^\lambda \rightarrow \mathcal{J}_1^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \xrightarrow{\Delta} \mathcal{J}_0^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \rightarrow 0,$$

⁽¹⁴⁾Remarquons que l'image de Δ^+ est fermée parce que c'est l'image d'un compact par une application continue.

dont le dual par le lemme 2.12 donne

$$0 \rightarrow \widehat{\mathcal{I}}_0^{\lambda,+} \otimes_{O_L} L \xrightarrow{\Delta} \widehat{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \otimes_{O_L} L \rightarrow \mathcal{C}^\lambda \rightarrow 0.$$

Ainsi $I^{\lambda,+} := \text{Coker } \partial^+$ définit un O_L -réseau stable par G de $\text{St}_\lambda^{\text{alg}}$ dont le complété p -adique est un O_L -réseau G -stable de \mathcal{C}^λ . \square

2.2. Déformations infinitésimales de $V_\mathcal{L}^\lambda$. — Soit $\lambda \in P$ tel que $w(\lambda) > 1$, on pose $D = \text{Sp}(|\lambda| - 2)$; et, pour $n \geq 0$, $L_n := L[T]/T^{n+1}$. Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$.

2.2.1. $\mathcal{L} \neq \infty$. — Le cas $\mathcal{L} \neq \infty$ est très similaire au cas cuspidal (*cf.* [10]). On pose

$$D_{\text{dR}} := (\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} M)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L e_1 \oplus L e_0.$$

Soit $n \geq 0$ un entier, $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ désigne le L_n - $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module filtré défini par $D_{\mathcal{L},n}^\lambda = L_n \otimes_L \text{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ en tant que L_n - $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module et tel que $(\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathcal{L},n}^\lambda)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L_n \otimes_L D_{\text{dR}}$ est muni de la filtration $\text{Fil}_{\mathcal{L},n}^\bullet$ définie par

$$\text{Fil}_{\mathcal{L},n}^i := \begin{cases} L_n \otimes_L D_{\text{dR}} & \text{si } i \leq -\lambda_2 + 1 \\ L_n \otimes_L (e_1 - (\mathcal{L} + T)e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leq i \leq -\lambda_1 + 1 \\ 0 & \text{si } i \geq -\lambda_1 + 2 \end{cases}$$

Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 \leq k \leq n$, $T^k D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est isomorphe à $D_{\mathcal{L},n-k}^\lambda$ comme L - (φ, N) -module filtré.

Lemme 2.15. — Soit $n \geq 0$.

1. Le L_n - (φ, N) -module filtré $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est faiblement admissible.
2. Les seuls sous L - (φ, N) -modules filtrés faiblement admissibles de $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ sont les $T^k D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ pour $0 \leq k \leq n$.

Démonstration. — La preuve est très similaire à celle de [10, Lemme 4.3] avec une petite différence puisque $D_{\mathcal{L}}^\lambda$ n'est pas irréductible comme L - (φ, N) -module. Posons $w := w(\lambda)$. Soit $S \subset D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ un sous- L - (φ, N) -module. Alors S est de la forme $S = \Lambda_0 e_0 \oplus \Lambda_1 e_1$ où Λ_1 et Λ_0 sont des L -sous-espaces vectoriels de L_n tels que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$, puisque S est stable par N . Notons $d_i := \dim_L \Lambda_i$ pour $i = 0, 1$, on a donc $d_1 \leq d_0$. Comme la filtration n'a que deux crans, en simplifiant l'inégalité des pentes, le premier point revient à montrer

$$w \dim_L(S \cap \text{Fil}_{\mathcal{L},n}^{-\lambda_1}) \leq d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2},$$

et le second point à montrer que, si l'inégalité est une égalité, alors $\Lambda_1 = \Lambda_0 \cong T^k L_n$ pour $k \geq 0$. Or, $S \cap \text{Fil}_{\mathcal{L},n}^{-\lambda_1}$ est constitué d'éléments de la forme $P e_1 + (\mathcal{L} + T)P e_0$ où $P \in \Lambda_1$ et $(\mathcal{L} + T)P \in \Lambda_0$. En particulier :

$$w \dim_L(S \cap \text{Fil}_{\mathcal{L}}^{-\lambda_1}) \leq d_1 w = d_1 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2} \leq d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2}.$$

Ceci finit de prouver le premier point. Pour le second point, il est clair que si l'on a égalité, alors $d_1 = d_0$, c'est-à-dire que $\Lambda := \Lambda_0 = \Lambda_1$ et donc $S = \Lambda \otimes_L \text{Sp}(|\lambda| - 2)$. Dans ce cas, pour un élément $P e_1 + (\mathcal{L} + T)P e_0 \in S \cap \text{Fil}_{\mathcal{L}}^{-\lambda_1}$ on a $(\mathcal{L} + T)P \in \Lambda$, donc $T P \in \Lambda$, c'est-à-dire que $\Lambda \subset L_n$ est un idéal car il est stable par T , *i.e.* il existe $k \geq 0$ tel que $\Lambda = T^k L_n$. \square

2.2.2. $\mathcal{L} = \infty$. — Le cas $\mathcal{L} = \infty$ est différent du précédent : plutôt que de déformer la filtration, on déforme l'opérateur de monodromie *et* le frobenius. Posons

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_\infty &:= L[\![T_1, T_2]\!]/\langle T_1 T_2 \rangle, \\ \mathbb{L}_{\mathbf{n}} &:= \mathbb{L}/\langle T_1^{n_1+1}, T_2^{n_2+1} \rangle, \quad \mathbf{n} := (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2\end{aligned}$$

On pose comme précédemment

$$D_{\text{dR}} := (\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} M)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L e_1 \oplus L e_0.$$

Soit $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ une paire d'entiers positifs et $k \in \mathbb{Z}$, on définit $\widetilde{\text{Sp}}_{\mathbf{n}}(k) = \mathbb{L}_{\mathbf{n}} e_0 \oplus \mathbb{L}_{\mathbf{n}} e_1$ le $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}\text{-}(\varphi, N)$ -module par les formules

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}}(1 - T_1)e_1 \\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}}(1 - T_1)^{-1}e_0, \end{cases} \quad \begin{cases} Ne_1 = T_2 e_0 \\ Ne_0 = 0. \end{cases}$$

On doit vérifier la relation $p\varphi N = N\varphi$ qui, appliquée à e_0 , est évidente ; appliquée à e_1 , donne

$$(p\varphi N - N\varphi)e_1 = p^{-\frac{k+1}{2}}T_2[(T_1 + 1)^{-1} - (1 + T_1)]e_1 = p^{-\frac{k+1}{2}}uT_2T_1e_1 = 0,$$

où $u = 2 + \sum_{i=1}^{n_1} T_1^i \in \mathbb{L}_{\mathbf{n}}^\times$. Ceci justifie la relation $T_1 T_2 = 0$ dans \mathbb{L}_∞ .

Pour $\lambda \in P$, on définit le $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}\text{-}(\varphi, N)$ -module filtré $\mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda$ de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}\text{-}(\varphi, N)$ -module sous-jacent $\widetilde{\text{Sp}}_{\mathbf{n}}(|\lambda| - 2)$ et dont la filtration est définie par $\text{Fil}_{\infty, \mathbf{n}}^\bullet := \mathbb{L}_{\mathbf{n}} \otimes_L \text{Fil}_\infty^\bullet$ sur $(\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L_{\mathbf{n}} \otimes_L D_{\text{dR}}$

Comme précédemment, pour $k_i \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 \leq k_i \leq n_i$ pour $i = 1, 2$, $T_1^{k_1} T_2^{k_2} \mathbb{D}_{\infty, (n_1, n_2)}^\lambda$ est isomorphe à $\mathbb{D}_{\infty, (n_1 - k_1, n_2 - k_2)}^\lambda$ comme $L\text{-}(\varphi, N)$ -module filtré et on a le lemme suivant :

Lemme 2.16. — Soit $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.

1. Le $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}\text{-}(\varphi, N)$ -module filtré $\mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda$ est faiblement admissible.
2. Les seuls sous $L\text{-}(\varphi, N)$ -modules filtrés faiblement admissibles de $\mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda$ sont les $T_1^{k_1} T_2^{k_2} \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda$ pour $0 \leq k_1 \leq n_1$, $0 \leq k_2 \leq n_2$.

Démonstration. — La preuve est très proche de celle du lemme 2.15. Soit $S \subset \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda$ un sous- $L\text{-}(\varphi, N)$ -module. Alors $S = \Lambda_0 e_0 \oplus \Lambda_1 e_1$ avec Λ_0, Λ_1 des L -sous-espaces vectoriels de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. Comme S est stable par N , $T_2 \Lambda_1 \subset \Lambda_0$ et comme S est stable par φ , $(1 - T_1)\Lambda_1 \subset \Lambda_1$ et $(1 - T_1)^{-1}\Lambda_0 \subset \Lambda_0$ ce qui implique que Λ_0 et Λ_1 sont stables par T_1 . Soit $d_i := \dim_L \Lambda_i$ pour $i = 0, 1$ et $d := \dim_L(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)$, notons que $d \leq d_0, d_1$.

Comme la filtration n'a que deux crans, on peut simplifier l'inégalité des pentes comme dans la preuve du lemme 2.15 ; le premier point revient donc à montrer

$$w \dim_L(S \cap \text{Fil}_{\infty, \mathbf{n}}^{-\lambda_1}) \leq d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2},$$

et le second point à montrer qu'en cas d'égalité, $\Lambda_0 = \Lambda_1 = T_1^{k_1} T_2^{k_2} \mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. Or, $S \cap \text{Fil}_{\infty, \mathbf{n}}^{-\lambda_1}$ est constitué d'éléments de la forme $P e_1 + P e_0$ où $P \in \Lambda_1 \cap \Lambda_0$ et donc

$$(2.4) \quad w \dim_L(S \cap \text{Fil}_{\infty, \mathbf{n}}^{-\lambda_1}) = wd = d \frac{w-1}{2} + d \frac{w+1}{2} \leq d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2}.$$

Ceci fini de prouver le premier point. Pour le second point, il est clair que si l'on a égalité dans (2.4), alors $d = d_0 = d_1$ et donc $\Lambda := \Lambda_0 = \Lambda_1$. Dans ce cas, comme $T_2 \Lambda \subset \Lambda$, Λ est stable par T_2 et on a déjà montré que Λ est stable par T_1 donc c'est un idéal de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$, *i.e.* il existe $k_1, k_2 \geq 0$ tels que $\Lambda = T_1^{k_1} T_2^{k_2} \mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. \square

Pour $n \geq 0$ un entier, on définit $D_{\infty, n}^\lambda := \mathbb{D}_{\infty, n}^\lambda / T_1 \mathbb{D}_{\infty, n}^\lambda$ comme $L_n\text{-}(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module filtré par l'isomorphisme $L_n \cong L[\![T_2]\!] = \mathbb{L}_\infty / T_1$; on définit de même $D_{\infty, n}^{\lambda, \text{cr}} := \mathbb{D}_{\infty, n}^\lambda / T_2 \mathbb{D}_{\infty, n}^\lambda$ comme

L_n - $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -module filtré par l'isomorphisme $L_n \cong L[\![T_1]\!] = \mathbb{L}_\infty/T_2$. Pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}$, on a un diagramme cartésien de $\mathbb{L}_\mathbf{n}$ - $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$ -modules filtrés

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda & \xrightarrow{\text{mod } T_2} & D_{\infty, n_1}^{\lambda, \text{cr}} \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ D_{\infty, n_2}^\lambda & \longrightarrow & D_\infty^\lambda \end{array}$$

2.2.3. Déformations. — On rappelle le lemme suivant (*cf.* [15, Proposition 7.17]) :

Lemme 2.17. — Soit $\lambda \in P$ et $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$.

1. Pour $\mathcal{L} \neq \infty$, le sous- L -espace vectoriel de $\text{Ext}_{L[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]}^1(V_{\mathcal{L}}^\lambda, V_{\mathcal{L}}^\lambda)$ des extensions de Rham de déterminant $\zeta_\lambda \omega$ est de dimension 1.
2. Le sous- L -espace vectoriel $\text{Ext}_{L[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]}^1(V_\infty^\lambda, V_\infty^\lambda)$ des extensions de Rham de déterminant $\zeta_\lambda \omega$ est de dimension 2.

Remarque 2.18. — Dans la preuve de la proposition [15, Proposition 7.17] il apparaît en outre que, dans le cas exceptionnel, le sous-espace des extensions cristallines de déterminant $\zeta_\lambda \omega$, est de dimension 1 (ou de manière équivalente, le sous-espace des extensions semi-stables de déterminant $\zeta_\lambda \omega$ des extensions W telles que $N \neq 0$ sur $\mathbf{D}_{\text{pst}}(W)$, est de dimension 1). On le déduit aussi de l'existence de la déformation $\mathbb{V}_{\infty, (1,1)}^\lambda$.

Pour $n \geq 0$ et $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose pour $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$

$$V_{\mathcal{L}, n}^\lambda := \mathbf{V}_{\text{st}}(D_{\mathcal{L}, n}^\lambda[1]), \quad \mathbb{V}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda := \mathbf{V}_{\text{st}}(\mathbb{D}_{\mathcal{L}, \mathbf{n}}^\lambda[1]), \quad V_{\infty, n}^{\lambda, \text{cr}} := \mathbf{V}_{\text{st}}(D_{\infty, n}^{\lambda, \text{cr}}[1]).$$

Comme le foncteur \mathbf{V}_{st} est exact, il préserve les limites finies et le diagramme cartésien 2.5 donne un diagramme cartésien de $\mathbb{L}_\mathbf{n}$ -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$:

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{\infty, \mathbf{n}}^\lambda & \xrightarrow{\text{mod } T_2} & V_{\infty, n_1}^{\lambda, \text{cr}} \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ V_{\infty, n_2}^\lambda & \longrightarrow & V_\infty^\lambda \end{array}$$

Soit \mathcal{B} le bloc correspondant à la réduction⁽¹⁵⁾ de $V = V_{\mathcal{L}}^\lambda$ et posons $R := R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}, \zeta_\lambda}[1/p]$. Alors V définit un idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathcal{L}}^\lambda \subset R$. Soit $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ le complété $\mathfrak{m}_{\mathcal{L}}^\lambda$ -adique de R . Cet anneau est muni d'une représentation universelle $\widehat{\rho}_{\mathcal{L}} : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(\widehat{R}_{\mathcal{L}})$.

Soit maintenant $\widehat{R}_{\mathcal{L}, \text{dR}}$ le quotient de $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ classifiant les représentations de Rham, *i.e.* $\widehat{R}_{\mathcal{L}, \text{dR}} := \widehat{R}_{\mathcal{L}}/I$ où $I = \cap \mathfrak{a}$ et \mathfrak{a} parcourt les idéaux de $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ tels que $\widehat{R}_{\mathcal{L}}/\mathfrak{a}$ soit de dimension finie sur L et $(\widehat{R}_{\mathcal{L}}/\mathfrak{a}) \otimes \widehat{\rho}_{\mathcal{L}}$ soit de Rham.

Proposition 2.19. — Pour $\mathcal{L} \neq \infty$, on a $\widehat{R}_{\mathcal{L}, \text{dR}} \cong L_\infty$ et $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}}/T_2 \cong \widehat{R}_{\infty, \text{dR}}/T_1 \cong L_\infty$

Démonstration. — Supposons d'abord que $\mathcal{L} \neq \infty$, la preuve est alors la même que celle de [10, Proposition 4.5]. En effet, d'après le premier point du lemme 2.17, $V_{\mathcal{L}, 1}^\lambda$ est l'unique extension non triviale de $V_{\mathcal{L}}^\lambda$ par $V_{\mathcal{L}}^\lambda$ qui est de déterminant $\zeta_\lambda \omega$ et qui soit de Rham. On en déduit que $\widehat{R}_{\mathcal{L}, \text{dR}}$ est un anneau local régulier de dimension 1.

Si $\mathcal{L} = \infty$, le second point du lemme 2.17 donne que $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}}$ est un quotient de $L[\![T_1, T_2]\!]$. Alors $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}}/T_1$ est un quotient de L_n et l'existence de $V_{\infty, n}^\lambda$ pour tout $n \geq 0$ fournit une suite compatible de morphismes $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}}/T_1 \rightarrow L_n$; ils sont surjectifs puisque $V_{\infty, 1}^\lambda$ n'est pas scindé. Le même raisonnement pour $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}}/T_2$ donne le résultat. \square

⁽¹⁵⁾Rappelons que la *réduction* d'une L -représentation V de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est la semi-simplification de V^+/ϖ_L où $V^+ \subset V$ est un O_L -réseau stable par $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Cette définition est indépendante du réseau V^+ , grâce à la semi-simplification.

Proposition 2.20. — On a $\widehat{R}_{\infty, \text{dR}} \cong \mathbb{L}_{\infty} = L[\![T_1, T_2]\!]/\langle T_1 T_2 \rangle$.

Démonstration. — On note $R = \widehat{R}_{\infty, \text{dR}}$, $D := D_{\text{st}}(\widehat{\rho}_{\infty, \text{dR}})$ le R -(φ, N)-module filtré de la déformation infinitésimale universelle $\widehat{\rho}_{\infty, \text{dR}} : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R)$ et φ_D le frobenius sur D . Notons que D est un R -module libre de rang 2. On veut montrer qu'il existe un morphisme $\mathbb{L}_{\infty} \rightarrow R$ tel que $\mathbb{D}_{\infty}^{\lambda} \otimes_{\mathbb{L}_{\infty}} R \cong D$. Rappelons que R est un quotient de $L[\![T_1, T_2]\!]$ et notons

$$\mathbb{D}_1 := \varprojlim_{\mathbf{n}} \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^{\lambda}/T_2, \quad \mathbb{D}_2 := \varprojlim_{\mathbf{n}} \mathbb{D}_{\infty, \mathbf{n}}^{\lambda}/T_1;$$

ils définissent des L_{∞} -(φ, N)-modules. D'après la proposition 2.19, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\text{mod } T_2} & R_1 \cong L[\![T_1]\!] \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ R_2 \cong L[\![T_2]\!] & \longrightarrow & L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\text{mod } T_2} & D_1 \cong \mathbb{D}_1 \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ D_2 \cong \mathbb{D}_2 & \longrightarrow & D_{\infty}^{\lambda} \end{array}$$

Soient \tilde{e}_0, \tilde{e}_1 des relèvements de $e_0, e_1 \in \mathbb{D}_1$; d'après le lemme de Nakayama

$$D = R\tilde{e}_0 \oplus R\tilde{e}_1.$$

Comme D est de rang 2 sur R et que $N \neq 0$ sur son quotient D_2 , on sait que $N \neq 0$ et $N^2 = 0$ sur D , donc, d'après le lemme de Nakayama, $\ker N = R\tilde{e}_0$. Comme $\ker N$ est stable par φ_D , on obtient $u \in L[\![T_1, T_2]\!]^{\times}$ tel que $\varphi_D(\tilde{e}_0) = u\tilde{e}_0$. De plus, il existe $P \in L[\![T_1, T_2]\!]$ tel que $N\tilde{e}_1 = T_2 P\tilde{e}_0$ puisque $N \equiv 0 \pmod{T_2}$. Alors, $\varphi_D(\tilde{e}_1) = \beta\tilde{e}_1 + \gamma\tilde{e}_0$ et quitte à faire le changement de base $\tilde{e}_1 \leftrightarrow \tilde{e}_1 - \gamma u^{-1}\tilde{e}_0$, on peut supposer que $\gamma = 0$ et $\beta = pu^{-1}$.

Pour résumer, on a justifié que $D = R\tilde{e}_0 \oplus R\tilde{e}_1$, $u \in L[\![T_1, T_2]\!]^{\times}$ et $P \in L[\![T_1, T_2]\!]$ tels que

$$\begin{cases} \varphi_D(\tilde{e}_1) = pu^{-1}\tilde{e}_1 \\ \varphi_D(\tilde{e}_0) = u\tilde{e}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} N\tilde{e}_1 = PT_2\tilde{e}_0 \\ N\tilde{e}_0 = 0 \end{cases}$$

Montrons que $v = (u - u^{-1}) \in T_1 R^{\times}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $v \equiv 2T_1 \pmod{\langle T_1^2, T_2 \rangle}$; or, on a $v \equiv (1 - T_1) - (1 - T_1)^{-1} \equiv 2T_1 \pmod{\langle T_1^2, T_2 \rangle}$. Ainsi, on obtient

$$(p\varphi_D N - N\varphi_D)\tilde{e}_1 \in T_1 T_2 P R^{\times},$$

et donc R est un quotient de $R' := L[\![T_1, T_2]\!]/\langle T_1 T_2 P \rangle$. Enfin, le morphisme $\mathbb{L}_{\infty} \rightarrow R'$ défini par $T_1 \mapsto T_1$ et $T_2 \mapsto PT_2$ est tel que $\mathbb{D}_{\infty}^{\lambda} \otimes_{\mathbb{L}_{\infty}} R \cong D$. \square

2.3. Déformations infinitésimales de $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda}$. — Pour $n \geq 0$ et $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose pour $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$

$$\Pi_{\mathcal{L}, n}^{\lambda} := \mathbf{\Pi}(V_{\mathcal{L}, n}^{\lambda}), \quad \mathbf{\Pi}_{\infty, \mathbf{n}}^{\lambda} := \mathbf{\Pi}(\mathbf{V}_{\infty, \mathbf{n}}^{\lambda}), \quad \Pi_{\infty, n}^{\lambda, \text{cr}} := \mathbf{\Pi}(V_{\infty, n}^{\lambda, \text{cr}}).$$

À partir du diagramme cartésien (2.5), un diagramme de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$ -représentations de G

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{\Pi}_{\infty, \mathbf{n}}^{\lambda} & \xrightarrow{\text{mod } T_2} & \Pi_{\infty, n_1}^{\lambda, \text{cr}} \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_{\infty, n_2}^{\lambda} & \longrightarrow & \Pi_{\infty}^{\lambda} \end{array}$$

Remarque 2.21. — Il n'est pas immédiat que ce diagramme est cartésien puisque $\mathbf{\Pi}$ n'est pas exact au sens strict du terme. Il est sûrement possible de montrer qu'il l'est à partir de 2.6 en appliquant \mathbf{V} au diagramme 2.7 et en se ramenant à des représentations Π qui satisfont $\mathbf{\Pi} \circ \mathbf{V}(\Pi) = \Pi$.

2.3.1. *Vecteurs localement algébriques.* — Dans ce numéro on calcule les vecteurs localement algébriques de $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ et $\Pi_{\infty,n}^\lambda$. On commence par rappeler la proposition suivante (*cf.* [10, Théorème 4.1]) :

Proposition 2.22. — *Soit E une algèbre locale de corps résiduel L et V une E -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de rang 2 sur E qui est absolument irréductible. Alors $\Pi(V)^{\text{lalg}}$ est dense dans $\Pi(V)$ si et seulement si V est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts.*

Rappelons que⁽¹⁶⁾

$$\text{lalg}\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda = \begin{cases} \text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}} & \mathcal{L} \neq \infty, \\ \widetilde{\text{St}}_{\lambda}^{\text{lalg}} & \mathcal{L} = \infty, \end{cases}$$

où $\widetilde{\text{St}}_{\lambda}^{\text{lalg}}$ est l'unique extension de W_λ^* par $\text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}}$. Notons que $\text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}}$ est dense dans $\text{lalg}\Pi_{\infty}^\lambda$ puisque cette représentation est un quotient de \mathcal{C}^λ d'après la proposition 2.8.

Lemme 2.23. — 1. Si $n \geq 0$ est un entier et $\mathcal{L} \neq \infty$ alors

$$\text{lalg}\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda \cong \text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}} \otimes_L L_n.$$

2. Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ alors on a un diagramme commutatif de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$ -représentations de G

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} \text{lalg}\Pi_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda & \xrightarrow{\text{mod } T_2 \text{lalg}} & \text{lalg}\Pi_{\infty,n_1}^{\lambda,\text{cr}} \\ \text{mod } T_1 \downarrow & & \downarrow \\ \text{lalg}\Pi_{\infty,n_2}^\lambda & \longrightarrow & \widetilde{\text{St}}_{\lambda}^{\text{lalg}} \end{array}$$

$$\text{où } \text{lalg}\Pi_{\infty,n_2}^\lambda \cong \widetilde{\text{St}}_{\lambda}^{\text{lalg}} \otimes_L L_n.$$

Démonstration. — Pour le premier point, la preuve se fait comme [10, Remarque 4.7 (i)] que l'on rappelle brièvement. D'après [10, Remarque 4.2 (ii)], si Π est une L -représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphes à Π_0 et Π_0^{lalg} est irréductible et dense dans Π_0 alors Π^{lalg} est dense dans Π si et seulement si $\lg(\Pi) = \lg(\Pi^{\text{lalg}})$, ce qui permet d'obtenir le résultat grâce à 2.22.

Pour le second point, on commence par calculer $\text{lalg}\Pi_{\infty,n_2}^\lambda$, ce qui se fait comme précédemment en adaptant [10, Remarque 4.2 (ii)] de la façon suivante : si Π est une L -représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphes à Π_0 et Π_0^{lalg} est de longueur 2 et dense dans Π_0 alors Π^{lalg} est dense dans Π si et seulement si $2\lg(\Pi) = \lg(\Pi^{\text{lalg}})$. On adapte alors la fin de l'argument de [10, Remarque 4.7 (i)] pour conclure la preuve. \square

Remarque 2.24. —

- Notons que le diagramme (2.8) est cartésien si (2.7) est cartésien puisque prendre les vecteurs localement algébriques (et les vecteurs localement analytiques) est un foncteur exact à gauche donc commute aux limites finies.
- Si l'on disposait de théorèmes précis pour la correspondance de Langlands p -adique en famille (ce qui ne saurait tarder, *cf.* Colmez-Rodrigues, Dotto-Emerton-Gee), on pourrait décrire explicitement $\text{lalg}\Pi_{\infty,n_1}^{\lambda,\text{cr}}$ comme une induite localement algébrique explicite, puisque c'est une représentation ordinaire. Plus précisément, on aurait

$$\text{lalg}\Pi_{\infty,n_1}^{\lambda,\text{cr}} \cong \text{Ind}_B^G(x^{\lambda_1}(1-T_1)^{-v_p(x)} \otimes x^{\lambda_2-1}(1-T_1)^{v_p(x)})^{\text{lalg}} \otimes_L |\det|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

La démonstration du lemme suivant serait alors plus immédiate.

Lemme 2.25. — Soit $n \in \mathbb{N}$, tout morphisme $\text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}} \rightarrow \Pi_{\infty,n}^{\lambda,\text{cr}}$ se factorise par

$$\text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}} \rightarrow T_1^n \Pi_{\infty,n}^{\lambda,\text{cr}} \hookrightarrow \Pi_{\infty,n}^{\lambda,\text{cr}}.$$

⁽¹⁶⁾En raison des nombreuses décorations autour de Π , on s'autorise à placer l'exposant « lalg » en pré-exposant.

Démonstration. — Rappelons que $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$ est un quotient de

$$B_\lambda^{\text{lalg}} := \text{Ind}_B^G(x^{\lambda_1} \otimes x^{\lambda_2-1})^{\text{lalg}} \otimes_L |\det|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

Notons δ le caractère de T défini par $\delta(\text{diag}(x_1, x_2)) := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2-1} |x_1 x_2|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}$. Par la réciprocité de Frobenius, on se ramène à montrer que toute application $\delta \rightarrow \Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$ B -équivariante se factorise par $T_1^n \Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$. Pour cela, il suffit de démontrer que

$$(2.9) \quad g_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in {}^{\text{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}, \text{ alors } g_p \cdot v \in (1 - T_1)^{\pm 1} Lv$$

En effet si c'est le cas, l'image de $\delta \rightarrow {}^{\text{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$ est un élément $v \in \Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$ tel que $g_p \cdot v \in Lv$, ce qui donnerait $Lv = (1 - T_1)^{\pm 1} Lv$ et donc $v \in T_1^n \Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$.

Pour démontrer (2.9) on utilise le fait que ${}^{\text{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}} \cong (\Delta_{\text{dif}}^-)^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})-\text{finie}}$ en tant que L_n -représentation de B comme dans la preuve de [10, Théorème 4.2]. L'action de g_p est alors donnée par φ , d'après [7, Proposition I.3.6]. On en déduit que si $v \in {}^{\text{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda, \text{cr}}$, alors $g_p \cdot v \in (1 - T_1)^{\pm 1} Lv$. \square

Corollaire 2.26. — 1. Pour $n \geq 0$ un entier, la représentation $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est un quotient de \mathcal{C}^λ .

2. Pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, si $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \rightarrow \Pi_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ est un morphisme d'image dense, alors $n_1 = 0$.

Démonstration. — Pour le premier point, par la proposition 2.8, il suffit de construire une inclusion $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \hookrightarrow \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ d'image dense. Comme $V_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est de Rham, d'après la proposition 2.22, ${}^{\text{lalg}}\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda \hookrightarrow \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est d'image dense. Par le lemme 2.23 et l'irréductibilité de $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$, on obtient

$$\text{Hom}_G(\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}, {}^{\text{lalg}}\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda) \cong L_n$$

On choisit $f: \text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \rightarrow \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ correspondant à $\lambda \in L_n^\times$ dont la projection sur $(\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda/T)^{\text{lalg}}$ est non nulle ; elle est donc injective et dense dans $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda/T$. On en déduit que l'image de f est dense dans $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ car ses seules sous- L -représentations (topologiques) de G sont les $T^k \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ pour $0 \leq k \leq n$.

Pour le second point, supposons que l'on ait un morphisme $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \rightarrow \Pi_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ d'image dense et montrons que $n_1 = 0$. D'après la proposition 2.8, on a une suite de surjections $\mathcal{C}^\lambda \twoheadrightarrow \Pi_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda \twoheadrightarrow \Pi_{\infty,n_1}^{\lambda, \text{cr}}$. Alors, d'après la proposition 2.8 on a un morphisme injectif $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \hookrightarrow \Pi_{\infty,n_1}^{\lambda, \text{cr}}$ d'image dense. Ainsi, d'après le lemme 2.25, $n_1 = 0$. \square

2.3.2. Complétés de longueur finie de $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$

Proposition 2.27. — Soit $\lambda \in P$ tel que $w(\lambda) > 1$. Soit Π une L -représentation unitaire de G de caractère central ζ_λ muni d'un morphisme $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}} \rightarrow \Pi$ d'image dense telle que les composantes de Jordan-Hölder⁽¹⁷⁾ de Π soient tous $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ avec multiplicité n , pour $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$. Alors $\Pi \cong \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$.

Démonstration. — La preuve est très similaire à [10, Proposition 4.8]. On rappelle brièvement l'argument.

Soit $J_{\mathcal{L}}$ l'enveloppe injective de $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ dans la catégorie des limites inductives des L -représentations unitaires de G . Alors $\text{End}J_{\mathcal{L}} = \widehat{R}_{\mathcal{L}}$ d'après [24, Corollary 6.26] et comme le bloc de $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ dans la catégorie des représentations unitaires de G n'a qu'un objet (puisque $V_{\mathcal{L}}^\lambda$ est absolument irréductible, cf. [24, Corollary 6.11]) on a

$$\Pi \cong (\text{Hom}_G(J_{\mathcal{L}}', \Pi') \otimes_{\widehat{R}_{\mathcal{L}}} J_{\mathcal{L}}')'.$$

Comme $\text{St}_\lambda^{\text{lalg}}$ est dense dans Π , Π^{lalg} est dense dans Π et donc $\text{Hom}_G(J_{\mathcal{L}}', \Pi')$ est en fait un $\widehat{R}_{\mathcal{L}, \text{dR}}$ -module.

⁽¹⁷⁾En fait, il suffit de supposer qu'une seule des composantes de Jordan-Hölder soit $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$.

- Si $\mathcal{L} \neq \infty$ la proposition 2.19 implique que

$$\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi') \cong \bigoplus_{i \in I} L_{\infty}/T^{n_i}, \quad \Pi \cong \bigoplus_{i \in I} \Pi_{\mathcal{L}, n_i}^{\lambda},$$

où I est un ensemble fini et $n_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I$. Comme dans la preuve de [10, Proposition 4.8], en utilisant la densité de $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$, on conclut que $|I| = 1$.

- Si $\mathcal{L} = \infty$ la proposition 2.20 implique que

$$\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi') \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{L}_{\infty}/\langle T_1^{n_i}, T_2^{m_i} \rangle, \quad \Pi \cong \bigoplus_{i \in I} \Pi_{\infty, (n_i, m_i)}^{\lambda},$$

où I est un ensemble fini et $(n_i, m_i) \in \mathbb{N}^2$ pour tout $i \in I$. Comme précédemment on conclut que $|I| = 1$ ce qui donne que $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$ est dense dans $\Pi \cong \Pi_{\infty, (n, m)}^{\lambda}$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et donc $n = 0$ d'après le point 2 du corollaire 2.26. Donc $\Pi \cong \Pi_{\infty, m}^{\lambda}$.

□

2.4. Complétion \mathcal{B} -adique et anneaux de Kisin. —

2.4.1. Définitions. — Rappelons que (*cf.* [10, §2.1]) si X est un $\mathrm{O}_L[G]$ -module topologique, on définit $X_{\mathcal{B}}$, le complété \mathcal{B} -adique de X , comme la limite inverse des quotients de X appartenant à $\mathrm{Tors}_{\mathcal{B}} G$. Le complété profini \widehat{X} de X admet une décomposition

$$\widehat{X} = \prod_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}},$$

où \mathcal{B} décrit l'ensemble des blocs des k_L -représentations de G . On appelle dans ce cas $X_{\mathcal{B}}$ le complété \mathcal{B} -adique de X . En particulier, on note $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}$ le complété \mathcal{B} -adique de $I^{\lambda, +}$ *cf.* proposition 2.9). On a

$$\widehat{I}^{\lambda, +} = \prod_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +},$$

et on pose $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda} := I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +} \otimes_{\mathrm{O}_L} L$.

On écrit $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +} = \varprojlim_i \Pi_i^+$ où les $\Pi_i^+ \in \mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}^{\zeta_{\lambda}} G$ et on pose

$$\sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} := (\varprojlim_i \mathbf{V}(\Pi_i^+)) \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$

Par l'isomorphisme du théorème 2.3 $R_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}$ agit sur $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}$, on note $R_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}$ le quotient à travers lequel $R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}, \zeta_{\lambda}}$ agit sur $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}$ et on pose $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} := R_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}[1/p]$ (ce sont les anneaux de Kisin définis dans l'introduction). Ainsi $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est un $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ -module et par la fonctorialité de \mathbf{V} , on obtient une action de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ sur $\sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda}$. Le but de cette sous-section est de montrer que $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda} = T_{M, \mathcal{B}}^{\lambda}$.

2.4.2. Propriétés de finitude. —

Lemme 2.28. — *Le $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ -module $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est de type fini.*

Démonstration. — On suit la preuve de [10, Lemme 5.2]. Il suffit de prouver que $\mathbf{V}(I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +})$ est un $R^+ = R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}, \zeta_{\lambda}}$ -module de type fini. Par le lemme de Nakayama (topologique), il suffit de montrer que $\mathbf{V}(I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}) \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L$ est de type fini. Or,

$$\mathbf{V}(I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +}) \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L = \mathbf{V}(I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L) = \mathbf{V}((I^{\lambda, +} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L)_{\mathcal{B}}).$$

En effet, pour la première égalité, $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +} = \varprojlim_i \Pi_i^+$ où les morphismes de transition sont surjectifs, alors, en considérant la suite exacte

$$0 \rightarrow \Pi_i^+ \xrightarrow{\varpi_L} \Pi_i^+ \rightarrow \Pi_i^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L \rightarrow 0,$$

à laquelle on applique le foncteur exact \mathbf{V} (*cf.* [7, Théorème IV. 2.24]), puis on passe à la limite projective ce qui donne encore une suite exacte puisque $R^1 \lim \mathbf{V}(\Pi_i^+) = 0$ ($\Pi_{i+1}^+ \rightarrow \Pi_i^+$ étant surjectif et \mathbf{V} exacte, $\mathbf{V}(\Pi_{i+1}^+) \rightarrow \mathbf{V}(\Pi_i^+)$ est surjectif). L'égalité $I_{\mathcal{B}}^{\lambda, +} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L = (I^{\lambda, +} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L)_{\mathcal{B}}$ découle de l'exactitude de la \mathcal{B} -complétion (*cf.* [10, Corollaire 2.3]).

On conclut alors la preuve par le corollaire par [10, Corollaire 2.8] comme dans la preuve de [10, Lemme 5.2]. \square

Lemme 2.29. — Soit $n \geq 0$ un entier, $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta}[1/p]$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel. Le $L_x[G]$ -module $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est de longueur finie.

Démonstration. — On note

$$R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta}, \quad R := R^+[\frac{1}{p}], \quad \Pi_{x,n} := \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}.$$

Par [12, Corollary 1.6] il suffit de montrer que $\Pi_{x,n}$ est résiduellement de longueur finie. Soit $\tilde{\mathfrak{n}}_{x,n} := R^+ \cap \mathfrak{m}_{x,n}$ et $\mathfrak{n}_{x,n} \subset R^+$ l'idéal engendré par $\tilde{\mathfrak{n}}_{x,n}$ et ϖ_L . Alors, il suffit de montrer que $\pi_{x,n} := I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}/\mathfrak{n}_{x,n}$ est de longueur finie. D'après [10, Proposition 2.2] on a

$$(2.10) \quad I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+} \cong (P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{\zeta}} \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}^{\zeta}, (I^{\lambda,+})^{\vee}))^{\vee}.$$

où $P_{\mathcal{B}}^{\zeta} := \bigoplus_{\pi \in \mathcal{B}} P_{\pi}^{\zeta}$ et $E_{\mathcal{B}}^{\zeta} := \text{End}(P_{\mathcal{B}})$ où P_{π} est l'enveloppe projective de π^{\vee} (définie dans [22, §2], cf. aussi n° 3.2.1) et $(\cdot)^{\vee} := \text{Hom}_G(\cdot, L/O_L)$ est le dual de Pontryagin. Mais d'après [24, Corollary 6.7], $P_{\mathcal{B}}^{\zeta}/\mathfrak{n}_{x,n} \cong \pi^{\vee}$ où π est un $O_L[G]$ -module de longueur finie, la formule 2.10 donne, par compacité et projectivité de $P_{\mathcal{B}}^{\zeta}$:

$$\pi_{x,n} \cong (\pi^{\vee} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{\zeta}} \text{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi))^{\vee}.$$

Donc il reste à montrer que $\text{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi)$ est de k_L -dimension finie. L'injection $I^{\lambda,+} \hookrightarrow \text{ind}_{KZ}^G \text{st}_{\lambda}^+$ (cf. (2.2)) combinée à la réciprocité de Frobenius donne une injection

$$\text{Hom}_G((I^{\lambda,+}/\varpi_L), \pi) \hookrightarrow \text{Hom}_{KZ}(\text{st}_{\lambda}^+/\varpi_L, \pi) = \text{Hom}_{KZ}(\text{st}_{\lambda}^+/\varpi_L, \pi^{K_1}),$$

où la dernière égalité est vérifiée car $K_1 := \ker(K \twoheadrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_p))$ agit trivialement sur $\text{st}_{\lambda}^+/\varpi_L$. Mais comme π est admissible, π^{K_1} est de dimension finie et comme $\text{st}_{\lambda}^+/\varpi_L$ est aussi de dimension finie, on en déduit que $\text{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi)$ est de dimension finie, ce qui termine la preuve. \square

2.4.3. La famille universelle. — Soit $\text{Ban}_{\mathcal{B}}^{\zeta}G$ la catégorie abélienne des L -représentations de Banach unitaires de G , de caractère central ζ , contenant un réseau dont la réduction modulo ϖ_L est dans \mathcal{B} . Notons

$$X := \text{Spec } R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta}[\frac{1}{p}], \quad X_{\text{Sp}} := \text{Spec } R_{\mathcal{B}}^{\lambda}.$$

On pose $U_{\mathcal{B}}^{\lambda} := \{\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\} \mid \Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} \in \text{Ban}_{\mathcal{B}}^{\zeta}G\}$. Alors, de façon équivalente $\mathcal{L} \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ si et seulement si $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ a pour réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$.

Soit $x \in X_{\text{Sp}}$, on note $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ l'idéal maximal associé et $L_x := R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x$.

Lemme 2.30. — Pour $n \geq 0$ un entier, pour tout $x \in X_{\text{Sp}}$, il existe $\mathcal{L}(x) \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) &\cong \Pi_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}, \\ \sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) &\cong V_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}, \quad \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \cong V_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}. \end{aligned}$$

En particulier, l'application $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ définit une bijection $X_{\text{Sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \cong U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.

Démonstration. — Notons

$$L_{x,n} := R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}, \quad \Pi_{x,n} := \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} L_{x,n}, \quad V_{x,n} := \sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} L_{x,n}.$$

Par construction, $\text{St}_{\lambda}^{\text{lalg}}$ est dense dans $\Pi_{x,n}$ et d'après 2.29, $\Pi_{x,n}$ est de longueur finie sur L_x donc par [22, Theorem 1.11], le bloc de $\text{Ban}_{\mathcal{B}}^{\zeta}G$ correspondant à $\Pi_{x,n}$ contient une unique représentation de la forme $\Pi_{\mathcal{L}(x)}^{\lambda}$ pour un certain $\mathcal{L}(x) \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, puisque cette représentation correspond à $V_{\mathcal{L}(x)}^{\lambda}$ qui est absolument irréductible. Ainsi, par la proposition 2.27, $\Pi_{x,n} \cong \Pi_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}$ (l'entier n provient du fait que $\Pi_{x,n}$ est annulé par \mathfrak{m}_x^{n+1}). Comme $V_{x,n} = \mathbf{V}(\Pi_{x,n})$ par définition on a $V_{x,n} = V_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}$ et d'après [22, Theorem 1.11] $\mathbf{V}(\Pi_{x,0}) \cong \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^{\lambda}} L_x$ dont on déduit le dernier isomorphisme. Finalement l'injectivité de $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ provient de l'injectivité de $\mathcal{L} \mapsto V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$.

□

On obtient alors l'équivalent de [10, Théorème 5.4].

- Proposition 2.31.** — 1. Le $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ -module $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est localement libre de rang 2.
 2. Le L -schéma X_{Sp} est lisse, réduit et purement de dimension 1.
 3. On a $\det_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} = R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cdot t^{|\lambda|}$.

Démonstration. — La preuve est *verbatim* la même que celle de [10, Théorème 5.4] (sauf le troisième point), dont on rappelle les ingrédients principaux. On note

$$R = R_{\mathcal{B}}^{\lambda}, \quad \rho^+ = \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}, \quad \rho = \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$$

et $\widehat{\rho}_x$ le complété du localisé de ρ en $x \in X_{\text{Sp}}$.

D'après le lemme 2.30, $\widehat{\rho}_x$ est libre de rang 2 sur $L_x[[T_x]]$ et $\text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} \widehat{\rho}_x \cong L_x[[T_x]]$ ce qui donne une injection $R \hookrightarrow \prod_x L_x[[T_x]]$. Ceci montre que R est réduit.

Ensuite, comme ρ est de type fini par le lemme 2.28, et $\widehat{\rho}_x$ est libre de rang 2, on obtient que ρ est localement libre de rang 2 sur R . Finalement, ceci implique que l'anneau local complété de R en x est $\widehat{R}_x \cong L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que X_{Sp} est lisse purement de dimension 1.

Pour le dernier point, notons $N = \det_R \rho$ qui est un R -module localement libre de rang 1 et $N^+ := \det_{R^+} \rho^+$. On sait que N^+ est de type fini sur R^+ et $N^+/\varpi_L \cong \det_{k_L} \bar{\rho}_{\mathcal{B}}$. Par le lemme de Nakayama, N^+ est engendré par un élément et donc N est engendré par un élément. Comme N est localement libre de rang 1 et engendré par un élément il est libre de rang 1 sur R . Or, $N \otimes_R L_x \cong L_x t^{|\lambda|}$ on en déduit que $N = R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cdot t^{|\lambda|}$.

□

2.4.4. L'ouvert analytique $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$. — On montre maintenant que $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique de $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$.

Proposition 2.32. — *L'application $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ est la restriction aux points classiques d'une application analytique $f: X_{\text{Sp}}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$. De plus, f est une immersion ouverte, c'est-à-dire que $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda} \subset \mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$.*

On commence par un lemme plus général, qui est une conséquence de [2].

Lemme 2.33. — Soit A^+ une O_L -algèbre locale complète noethérienne (topologiquement) de type fini, posons $A := A^+[\frac{1}{p}]$ et supposons que A est un anneau de Dedekind. Soit V une A -représentation (continue) de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, telle que

- V est libre de rang 2,
- $\det_A V = A \cdot e_{\chi}$ où $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit sur e_{χ} par un caractère $\chi: \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow L^{\times}$, en particulier, $\det_A V$ est libre de rang 1 sur A ,
- pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset A$, dont on note L_x le corps résiduel, $V_x := V \otimes_A L_x$ est spéciale à poids de Hodge-Tate λ i.e. $V_x \cong V_{\mathcal{L}(x)}^{\lambda}$ pour $\mathcal{L}(x) \in \mathbb{P}^1(L_x)$.

Alors :

1. $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \cong A \otimes_L D_{\text{dR}} = Ae_0 \oplus Ae_1$, en particulier, $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est libre de rang 2 sur A ,
2. $\text{Gr}_{-\lambda_2} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est localement libre de rang 1 sur A ,
3. il existe une application analytique $f: (\text{Spec } A)^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$ telle que $f(x) = \mathcal{L}(x)$ sur les points fermés.

Démonstration. — Notons que si les deux premiers points sont vérifiés, on définit l'application f du dernier point par $(D_{\text{dR}} \otimes_L A) \cong \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow \text{Gr}_{-\lambda_2} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$.

Pour le premier point, on commence par montrer que $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est localement libre de rang 2 sur A . Pour le second point, il suffit de montrer que $\mathbf{D}_{\text{HT}}(V)$ est localement libre puisque

$$\mathbf{D}_{\text{HT}}(V) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Gr}_i \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \text{Gr}_{-\lambda_2} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \oplus \text{Gr}_{-\lambda_1} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V).$$

On peut écrire A comme limite projective de L -algèbres affinoïdes $A := \varprojlim_i A_i$. On considère $V_i := V \otimes_A A_i$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) := \varprojlim_i \mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i)$ (*resp.* $\mathbf{D}_{\text{HT}}(V) := \varprojlim_i \mathbf{D}_{\text{HT}}(V_i)$) d'après [21, Lemma 4.4] (*resp.* [21, Lemma 3.5]) puisque $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i) \cong \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \otimes_A A_i$ (*resp.* $\mathbf{D}_{\text{HT}}(V_i) \cong \mathbf{D}_{\text{HT}}(V) \otimes_A A_i$).

D'après [2, Théorème 5.3.2], $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i)$ est un A_i -module localement libre de rang 2 et d'après [2, Théorème 5.1.4], $\mathbf{D}_{\text{HT}}(V_i)$ est un A_i -module localement libre de rang 2. Mais comme

$$\mathbf{D}_{\text{HT}}(V_i) = \text{Gr}_{-\lambda_2} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i) \oplus \text{Gr}_{-\lambda_1} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i),$$

on en déduit que $\text{Gr}_{-\lambda_2} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est localement libre de rang 1, ce qui prouve le second point.

Pour conclure la preuve du premier point, comme A est un anneau de Dedekind, par la classification des modules projectifs sur les anneaux de Dedekind, il suffit de montrer que $\det_A \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est libre de rang 1. On a

$$\det_A \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(\det_A V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A \cdot e_\chi)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} \cong A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_p \cdot e_\chi),$$

où la première égalité provient du fait que \mathbf{D}_{dR} est un foncteur monoïdal. Ceci finit de prouver le premier point.

Finalement, pour $x \in \text{Sp}A_i$ un point classique, comme $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V_i)_x \cong \mathbf{D}_{\text{dR}}(V_x)$ d'après [2, Théorème 5.3.2], on a $f(x) = \mathcal{L}(x)$ ce qui finit de prouver le dernier point. \square

Remarque 2.34. — Le dernier point du lemme 2.33 peut s'énoncer un peu différemment. On peut construire sur $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -module universel \mathcal{V}^λ tel que $\mathcal{V}_x^\lambda = V_x^\lambda$ où x est vu comme un élément de $\mathbb{P}^1(L_x)$. Alors on a $V \cong f^*\mathcal{V}^\lambda$.

On peut maintenant conclure la preuve de la proposition 2.32.

Démonstration. — Comme $R_B^\lambda = R_B^{\lambda,+}[\frac{1}{p}]$ où $R_B^{\lambda,+}$ est un anneau local complet noethérien, les hypothèses du lemme 2.33 sont satisfaites par la proposition 2.31 donc on obtient une application $f: X_{\text{Sp}}^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ et il s'agit de montrer que c'est une immersion ouverte. On va montrer que f est étale et injective sur tous les points avant de conclure en utilisant qu'un morphisme étale et injectif sur les points est une immersion ouverte (*cf.* [18, Lemme I.14]).

Commençons par montrer que f est étale. D'après le lemme 2.30, on sait que f est formellement étale aux points classiques, donc f est formellement étale puisque la condition d'être formellement étale est une condition ouverte. De plus, R_B^λ et $\mathbb{P}_L^{1,\text{an}}$ sont de présentation finie donc f est de présentation finie. Ainsi, f est étale.

D'après le lemme 2.30, f est injective sur les points classiques, il suffit de montrer que f est injective sur les C -points pour C une extension de \mathbb{Q}_p complète et algébriquement close. Soit $x_1, x_2 := R_B^\lambda \rightarrow C$. Si $f(x_1) = f(x_2)$ ceci signifie que x_1 et x_2 définissent la même filtration sur $D_{\text{dR}} \otimes_L C$, *i.e.* la même suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Gr}_{-\lambda_1}(D_{\text{dR}} \otimes_L C) \rightarrow (D_{\text{dR}} \otimes_L C) \rightarrow \text{Gr}_{-\lambda_2}(D_{\text{dR}} \otimes_L C) \rightarrow 0.$$

Par la théorie de Sen, on en déduit des isomorphismes canoniques

$$\rho_B^\lambda \otimes_{R_B^{\lambda,x_1}} C \cong \text{Gr}_{-\lambda_1}(D_{\text{dR}} \otimes_L C)(\lambda_1) \oplus \text{Gr}_{-\lambda_2}(D_{\text{dR}} \otimes_L C)(\lambda_2) \cong \rho_B^\lambda \otimes_{R_B^{\lambda,x_2}} C.$$

Comme ρ_B^λ est la famille universelle sur R_B^λ on en déduit que $x_1 = x_2$. Ceci conclut la preuve de la proposition. \square

Remarque 2.35. — La preuve de la liberté de $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\rho_B^\lambda)$ utilisant le fait que R_B^λ soit un anneau de Dedekind semble artificielle. Il est possible que pour R un anneau de Kisin plus général (disons pour les représentations de \mathcal{G}_F de dimension n de type cuspidal ou spécial à poids de Hodge-Tate fixés), le \mathbf{D}_{dR} de la famille universelle soit libre et qu'on puisse en déduire une application de $(\text{Spec } R)^{\text{an}}$ vers une variété de drapeau (partielle) qui soit une immersion ouverte, du moins lorsque M est cuspidal (*cf.* [27]).

2.5. Fin de la preuve et corollaires

On obtient finalement le théorème suivant :

- Théorème 2.36.** — 1. On a $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cong \mathcal{O}(\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda})$ qui est donc un produit fini d'anneaux principaux.
 2. Le $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ -module $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est libre de rang 2.
 3. On a $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} = T_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, i.e. $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} = \text{End}_G \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.
 4. On a un isomorphisme de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules $\sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cong \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.

Démonstration. — Dans la proposition 2.32 on a montré que $X_{\text{Sp}}^{\text{an}} \cong \mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ ce qui montre le premier point et c'est donc un produit d'anneaux principaux parce que $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est noethérien. Le second point est alors une conséquence de la proposition 2.31.

Pour le troisième point, la preuve est exactement la même que celle de [10, Corollaire 5.6], que l'on rappelle brièvement. On a une inclusion immédiate $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \hookrightarrow \text{End}_G \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, l'autre inclusion revient à considérer $\alpha \in \text{End}_G \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ et montrer que $\mathbf{V}(\alpha) \in \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est une homothétie en utilisant que s'en est une modulo \mathfrak{m}_x pour tout $x \in X_{\text{Sp}}$. Ceci donne $\mathbf{V}(\alpha) \in R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ et on conclut en remarquant que $\mathbf{V}(\alpha - \mathbf{V}(\alpha)) = 0$.

Par [11, Lemme 5.12] le dernier point est une conséquence immédiate du premier point et du lemme 2.30. \square

2.5.1. Universalité de $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$. — En suivant mot pour mot la preuve de [10, Théorème 5.8] on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.37. — Soit E une L -algèbre commutative de dimension d et $\rho: \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(E)$ a pour réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}^{\oplus d}$, est de déterminant ζ_{λ} , semi-stable à poids de Hodge-Tate λ et $\mathbf{D}_{\text{st}}(\rho) = \text{Sp}(|\lambda|) \otimes_L E$. Alors il existe un morphisme $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \rightarrow E$ tel que $\rho = E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.

Remarque 2.38. — Notons qu'à cause du cas exceptionnel, la réciproque du corollaire est fausse, i.e. l'équivalent de [10, Corollaire 5.7] est faux dans le cas spécial. En effet, si $\infty \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ alors le quotient de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \rightarrow L$ correspondant à $\mathcal{L} = \infty$ fournit une représentation dont le \mathbf{D}_{st} n'est pas $\text{Sp}(|\lambda|)$. Le corollaire reste vrai si l'on suppose $\infty \notin U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, on obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.39. — Soit E un quotient de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ de degré fini sur L , alors $E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est une E -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}^{\oplus [E: L]}$, semi-stable à poids de Hodge-Tate λ . De plus, si $\infty \notin U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ alors $\mathbf{D}_{\text{st}}(E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}) \cong E \otimes_L \text{Sp}(|\lambda|)$.

3. Factorisation de la cohomologie étale du système local

Soit $\lambda \in P_+$, $M \in \Phi N_{\lambda}$ et \mathcal{B} un bloc de $\text{Tors}^{\zeta_M^{\lambda}} G$. Si M est spécial supposons que $w(\lambda) > 1$, on renvoie à la remarque 3.3 pour la convention si M est spécial et $w(\lambda) = 1$. On commence par définir le $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}[\mathcal{G}]$ -module $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda})'$ comme dans [11, Définition 5.14].

Définition 3.1. — Soit $\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda, \Delta}$ un $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda, +}$ -réseau $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -stable dans le $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ -dual de $\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$. Le dual de Pontryagin de $\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda, \Delta}$ est de la forme $\varprojlim_i V_i$ où les V_i sont des représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de rang 2 sur des quotients de $R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda, +}$. On définit

$$\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda})' := \varprojlim_i \mathbf{\Pi}(V_i)' \otimes_{\mathcal{O}_L} L.$$

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}$ on a donc

$$\Pi'_x := \mathbf{\Pi}(\rho_x)' \cong L_x \otimes_{R_{\mathcal{B}, M}^{\lambda}} \mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^{\lambda})'.$$

Si $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$ on définit

$$\text{niv}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \check{G}_n^1 \subset \text{Stab}(\text{JL}_M)\},$$

où l'on rappelle que $\check{G}_n^1 \subset \check{G}_n^+$ est le noyau de la norme réduite. L'entier $\text{niv}(M)$ est bien défini puisque JL_M est une L -représentation lisse de dimension finie et \check{G}^1 est un groupe compact. Pour $n \geq 0$ un entier on note $\Phi N_\lambda^n \subset \Phi N_\lambda$ le sous-ensemble des $M \in \Phi N_\lambda$ tels que $\text{niv}(M) \leq n$ (notons que ΦN_λ^n est un ensemble fini). Dans toute cette section, on fixe $n \geq 0$ un entier, et on choisit L une extension finie de \mathbb{Q}_p toutes les extensions quadratiques de \mathbb{Q}_p et telle que tous les JL_M pour $M \in \Phi N_\lambda^n$ soient définis sur L . Le but consiste à démontrer le résultat de factorisation, *i.e.* le théorème suivant :

Théorème 3.2. — *On a un isomorphisme de $L[\mathbb{G}]$ -modules topologiques :*

$$H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \text{Sym}\mathbb{V}(1)) = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \bigoplus_{M \in \Phi N_\lambda^n} \left(\widehat{\bigoplus}_{\mathcal{B}} \mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda)' \otimes_{R_{\mathcal{B}, M}^\lambda} \rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B}, M}^\lambda} \check{R}_{\mathcal{B}, M}^\lambda \right) \otimes_L \text{JL}_M^\lambda$$

Remarque 3.3. —

- Comme annoncé précédemment, pour les facteurs associés à $\lambda \in P_+$ tels que $w(\lambda) = 1$, le théorème est précisément [11] tordu par un caractère. Dans le cas où M est spécial et $w(\lambda) = 1$ (*cf.* quatrième point de la remarque 2.2) la convention pour \mathcal{B} le bloc de la steinberg est $\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda) := \text{St}_L^0 \otimes (\zeta_M^\lambda \circ \det)$ où St_L^0 est la steinberg continue à coefficients dans L .
- L'une des difficultés principales dans [11] est de démontrer des théorèmes de finitude (*cf.* [11, Corollaire 0.12]) pour la cohomologie modulo p . Comme le système local modulo ϖ_D se trivialise sur le premier revêtement il n'est pas très difficile, en utilisant la suite spectrale d'Hochschild-Serre, de déduire ces théorèmes dans le cas des coefficients non triviaux (*cf.* n° 3.1.3).

Soit $\lambda \in P_+$ un poids que l'on fixe dans toute la suite. À fin d'alléger les notations, posons

$$H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda := \left(\varprojlim_m \varinjlim_{\substack{K/\mathbb{Q}_p \\ [K:\mathbb{Q}_p] < \infty}} H_{\text{ét}}^1({}^p M_K^n ; \mathbb{V}_\lambda^+(1)/p^m) \right) \otimes_{O_L} L.$$

Par définition et d'après [26], on a

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \text{Sym}\mathbb{V}(1)) &= \bigoplus_{\lambda \in P_+} H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda, \\ H_{\text{ét}}^1({}^p M_{\mathbb{Q}_p}^n ; \text{Sym}\mathbb{V}(1)) &= \bigoplus_{\lambda \in P_+} \bigoplus_{M \in \Phi N_\lambda^n} H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda[M] \otimes_L \text{JL}_M^\lambda. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que pour $M \in \Phi N_\lambda$ on a un $L[G \times \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -isomorphisme topologique

$$(3.1) \quad H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda[M] \cong \widehat{\bigoplus}_{\mathcal{B}} (\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda)' \otimes_{R_{\mathcal{B}, M}^\lambda} \rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B}, M}^\lambda} \check{R}_{\mathcal{B}, M}^\lambda)$$

En particulier, pour $M \cong \text{Sp}(|\lambda| - 2)$, on obtient :

Corollaire 3.4. — *Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$. Alors*

$$H_{\text{ét}}^1(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p} ; \mathbb{V}_\lambda(1)) = \widehat{\bigoplus}_{\mathcal{B}} \mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, \text{Sp}}^\lambda) \otimes_{R_{\mathcal{B}, \text{Sp}}^\lambda} \rho_{\mathcal{B}, \text{Sp}}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B}, \text{Sp}}^\lambda} \check{R}_{\mathcal{B}, \text{Sp}}^\lambda.$$

Comme (3.1) est démontré si $w(\lambda) = 1$, quitte à tordre par un caractère, on suppose que $w(\lambda) > 1$ dans toute la suite.

3.1. Rappels et compléments de [26]. — On définit

$$H_C^{\lambda,+} := H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n ; \mathbb{V}_\lambda^+(1))/\text{torsion}, \quad H_C^\lambda := H_C^{\lambda,+} \otimes_{O_L} L,$$

où l'on sait que la torsion est finie (*cf.* [26, Proposition 10.9]).

3.1.1. Entrelacement. — On a les théorèmes suivants démontrés dans [26] :

Théorème 3.5. — Soit Π une L -représentation unitaire et absolument irréductible de G sur un espace de Banach,

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi', \mathrm{H}_C^\lambda) \cong \begin{cases} V_{M,\mathcal{L}}^\lambda \otimes_L \mathrm{JL}_M^\lambda & \text{si } \Pi = \Pi_{M,\mathcal{L}}^\lambda, \quad M \in \Phi N_\lambda^n \\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas du type ci-dessus} \end{cases}$$

3.1.2. Une inclusion

Pour ce numéro, on doit rentrer un peu dans le détail de [26]. Notons simplement $X := {}^p\mathrm{M}_{\mathbb{Q}_p}^n$ et posons $\mathcal{O}^n := \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ laquelle est une L -représentation de $G \times \check{G}$. Pour $k, m \in \mathbb{Z}$ on définit $\mathcal{O}^n\{k, m\}$ par $\mathcal{O}^n\{k, m\} = \mathcal{O}^n$, en tant que $L[\check{G}]$ -module topologique, et l'action de $g \in G$ est définie pour $f \in \mathcal{O}^n$ par :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad (g \star f)(z) = j(z, g)^{-k} \det(g)^m f(g \cdot z),$$

où l'on note $\pi: {}^p\mathrm{M}_{\mathbb{Q}_p}^n \rightarrow {}^p\mathrm{M}_{\mathbb{Q}_p}^0$ la projection naturelle et $j(z, g) = (a - c\pi(z)) \in \mathcal{O}$ le facteur d'automorphie. L'action considérée a un sens puisque \mathcal{O}^n est naturellement un \mathcal{O}^0 -module. Pour $\lambda \in P_+$, on pose

$$\mathcal{O}_\lambda^n := \mathcal{O}^n\{1 - w(\lambda), 1 - \lambda_2\} \otimes_L |\det|_p^{\frac{1-|\lambda|}{2}}.$$

Lemme 3.6. — Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$, le $L[G]$ -module \mathcal{O}_λ^n n'a pas de vecteurs G -bornés, i.e. $(\mathcal{O}_\lambda^n)^{G-\mathrm{b}} = 0$.

Démonstration. — Par [9, Remarque A.2], pour $w(\lambda) = 1$, on a $(\mathcal{O}_\lambda^n)^{G-\mathrm{b}} = L$. On peut supposer que $\lambda = (0, k+1)$ avec $k \geq 1$, et quitte à tordre par un caractère. Soit $f \in \mathcal{O}_\lambda^n$ une fonction G -bornée, en agissant par le sous-groupe unipotent de G , on en déduit en particulier que

$$\{f(z+b)\}_{b \in \mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{O}_\lambda^n$$

est une partie bornée. Mais ceci implique que f est une fonction bornée sur X et donc, par [9, Remarque A.2], $f \in L$ est une constante. Mais dans ce cas, par l'action de G

$$\{|ad|^{\frac{1-k}{2}} a^{-k} f\}_{a,d \in \mathbb{Q}_p^\times} \subset L,$$

est une partie bornée. Donc $f = 0$, ce qui conclut la preuve. \square

Soit $M \in \Phi N_\lambda$, on introduit quelques notations :

- $\mathrm{H}_{\mathrm{pét},C}^\lambda := \mathrm{H}_{\mathrm{pét}}^1({}^p\mathrm{M}_C^n; \mathbb{V}_\lambda(1))$, le premier groupe de cohomologie proétale de $\mathbb{V}_\lambda(1)$,
- pour Z un $L[\check{G}]$ -module, $Z[M] := \mathrm{Hom}_{\check{G}}(\mathrm{JL}_M \otimes_L |\mathrm{nrd}|_p^{\frac{1-w}{2}}, Z)$,
- $X_{\mathrm{st}}^1(M) := (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{N=0, \varphi=p}$.

Proposition 3.7. — Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$ et $M \in \Phi N_\lambda^n$. On a une inclusion de $L[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \times G]$ -modules topologiques

$$\mathrm{H}_C^\lambda[M] \hookrightarrow t^{\lambda_1} X_{\mathrm{st}}^1(M[\lambda_1]) \widehat{\otimes}_L (\widehat{\mathrm{LL}}_M^\lambda)'$$

Démonstration. — On peut supposer $\lambda_1 = 0$ quitte à tordre par un caractère et poser $w = \lambda_2$. On commence par supposer M cuspidal. Alors, d'après [26, Corollaire 11.11] on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{B}_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_\lambda^n[M] \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{pét},C}^\lambda[M] \rightarrow X_{\mathrm{st}}^1(M) \widehat{\otimes}_L (\mathrm{LL}_M^\lambda)' \rightarrow 0,$$

où $\mathrm{B}_\lambda := \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^w$. On passe aux vecteurs G -bornés dans la suite exacte et comme

- $(\mathcal{O}_\lambda^n[M])^{G-\mathrm{b}} = 0$ par le lemme 3.6,
- $(\mathrm{H}_{\mathrm{pét},C}^\lambda[M])^{G-\mathrm{b}} = \mathrm{H}_C^\lambda[M]$ par [26, Théorème 10.1],

- $((\text{LL}_M^\lambda)')^{G-\text{b}} \cong (\widehat{\text{LL}}_M^\lambda)'$ par [11, Lemme 5.3 b)],

on obtient l'inclusion voulue.

On suppose maintenant que M est spécial et, quitte à tordre par un caractère, on peut supposer $M = \text{Sp}(|\lambda| - 2)$. Alors, d'après [26, Corollaire 12.15] on a une suite exacte

$$0 \rightarrow Q_\lambda^0 \otimes_L W_\lambda \rightarrow H_{\text{pét}}^\lambda[M] \rightarrow B_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} (\text{St}_\lambda^{\text{lan}})' \rightarrow Q_\lambda^1 \widehat{\otimes}_L (\text{St}_\lambda^{\text{lalg}})' \rightarrow 0.$$

où

$$U_\lambda^0(L) := L \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} (B_{\text{cr}}^+)^{\varphi^2=p^{w+1}}, \quad U_\lambda^1 := L \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} (B_{\text{cr}}^+)^{\varphi^2=p^{w-1}}, \quad Q_\lambda^i := \frac{B_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}{U_\lambda^i(L)}$$

Notons $K := \ker(B_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} (\text{St}_\lambda^{\text{lan}})' \rightarrow Q_\lambda^1 \widehat{\otimes}_L (\text{St}_\lambda^{\text{lalg}})')$. Alors on obtient la suite exacte courte

$$0 \rightarrow Q_\lambda^0 \otimes_L W_\lambda \rightarrow H_{\text{pét}}^\lambda[M] \rightarrow K \rightarrow 0,$$

où l'on passe aux vecteurs G -bornés. Or comme

- $W_\lambda^{G-\text{b}} = 0$,
- $(H_{\text{pét},C}^\lambda[M])^{G-\text{b}} = H_C^\lambda[M]$ par [26, Théorème 10.1] comme précédemment,
- $K^{G-\text{b}} \hookrightarrow U_\lambda^1(L) \widehat{\otimes}_L \mathcal{D}^\lambda$ par le lemme 2.6, en prenant les vecteurs G -bornés dans la définition de K ,

on obtient une injection $H_{\text{pét}}^\lambda[M] \hookrightarrow U_\lambda^1(L) \widehat{\otimes}_L \mathcal{D}^\lambda$ et comme $U_\lambda^1(L) \subset X_{\text{st}}^1(M)$ on obtient l'inclusion voulue. \square

3.1.3. Résultats de finitude. — D'après [26, Proposition 10.12], on a la proposition suivante :

Proposition 3.8. — Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p , alors $H_{\text{ét}}^1({}^p M_K^n; \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D)$ est le dual d'un $O_L[G]$ -module lisse de longueur finie.

Une preuve similaire par descente galoisienne donne la proposition suivante :

Proposition 3.9. — Soit π une k_L -représentation lisse et admissible de G , alors

$$\text{Hom}_{k_L[G]}(\pi'; H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n; \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D))$$

est un k_L -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — Le corollaire [11, Corollaire 4.21] implique que pour tout k_L -système local (de rang fini) trivial T , $\text{Hom}_{k_L[G]}(\pi'; H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n; T))$ est de dimension finie et comme $\mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D$ est trivial sur ${}^p M_C^n$ dès que $n \geq 1$, il suffit de montrer le résultat pour $n = 0$ ce que l'on fait par la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée au cas $n = 1$. Fixons π un $k_L[G]$ -module lisse et pour X un $k_L[G]$ -module, notons provisoirement $X[\pi'] := \text{Hom}_{k_L[G]}(\pi'; X)$. Notons

$$H := H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^0; \mathbb{V}_\lambda^+(1)/\varpi_D), \quad \widetilde{H} := H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^1; \mathbb{V}_\lambda^+(1)/\varpi_D).$$

Comme on l'a rappelé, $\widetilde{H}[\pi']$ est de dimension finie. Comme ${}^p M_C^1 \rightarrow {}^p M_C^0$ est un recouvrement étale de groupe de Galois $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{q^2}$, la suite spectrale de Hochschild-Serre donne une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}, \widetilde{H}) \rightarrow H \rightarrow \widetilde{H}^{\mathbb{F}}$$

Premièrement, justifions que $H^1(\mathbb{F}, \widetilde{H})[\pi'] = 0$. Comme l'action de G et \check{G} commutent, on a $H^1(\mathbb{F}, \widetilde{H})[\pi'] = H^1(\mathbb{F}, \widetilde{H}[\pi'])$. Mais comme $\widetilde{H}[\pi']$ est un k_L -espace vectoriel de dimension finie et que \mathbb{F} est un groupe fini d'ordre premier à p , $H^1(\mathbb{F}, \widetilde{H}[\pi']) = 0$. On obtient une inclusion

$$H[\pi'] \hookrightarrow \widetilde{H}^{\mathbb{F}}[\pi']$$

Or, $\widetilde{H}^{\mathbb{F}}$ est un sous- $k_L[G]$ -module de \widetilde{H} et donc on obtient une application injective

$$H[\pi'] \hookrightarrow \widetilde{H}[\pi'].$$

Comme $\widetilde{H}[\pi']$ est de dimension finie, ceci termine la preuve. \square

3.1.4. Vecteurs presque lisses. — Soit V^+ une O_L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Rappelons qu'on dit que $x \in V^+$ est *presque lisse* si pour tout entier $k \geq 1$, la classe de x modulo p^k est fixe par un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Les vecteurs presque lisses de V^+ forment une sous- O_L -représentation de V^+ .

Proposition 3.10. — *L'application naturelle*

$$H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+} \rightarrow H_C^{\lambda,+}$$

est injective et identifie $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+}$ aux vecteurs presque lisses de $H_C^{\lambda,+}$ sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Démonstration. — Soit $k \geq 1$ un entier, et K/\mathbb{Q}_p une extension finie. Comme on a supposé que $w(\lambda) > 1$ on a $H_{\text{ét}}^0({}^p M_C^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D^k) = 0$ dès que $k > 2n$. Donc la suite spectrale d'Hochschild-Serre donne

$$H_{\text{ét}}^1({}^p M_K^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D^k) \cong H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_D^k)^{\mathcal{G}_K}$$

En passant à la limite projective sur k , on obtient le résultat. \square

En particulier, comme les $V_{M,\mathcal{L}}^\lambda$ ont des réseau $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -stable dont tous les vecteurs sont presque lisses on déduit du théorème 3.5 le corollaire suivant :

Corollaire 3.11. — *Soit Π une L -représentation unitaire et irréductible de G sur un espace de Banach, alors*

$$\text{Hom}_G(\Pi', H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\lambda) \cong \begin{cases} V_{M,\mathcal{L}}^\lambda \otimes_L \text{JL}_M^\lambda & \text{si } \Pi = \Pi_{M,\mathcal{L}}^\lambda \text{ et } \text{niv}(M) \leq n \\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas du type ci-dessus} \end{cases}$$

Corollaire 3.12. —

1. $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+}$ est sans p -torsion, p -adiquement complet et p -saturé dans $H_C^{\lambda,+}$.
2. Pour tout entier $k \geq 1$, $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+}/p^k$ est une O_L -représentation lisse de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.
3. Pour tout entier $k \geq 1$ et toute extension finie K/\mathbb{Q}_p , le $O_L[G]$ -module $(H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+}/p^k)^{\mathcal{G}_K}$ est lisse de longueur finie.

Démonstration. — Les deux premiers points sont des conséquences de 3.10 et du fait que $H_C^{\lambda,+}$ est p -adiquement complet et sans p -torsion.

Pour le dernier point, on se ramène au cas $k = 1$ par un dévissage immédiat. La preuve se fait comme [11, Proposition 5.19], on la rappelle brièvement. Notons

$$Y := (H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\lambda,+}/p)^{\mathcal{G}_K}, \quad Z := H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n; \mathbb{V}_\lambda^+(1)/\varpi_D)^{\mathcal{G}_K}$$

On a une injection continue $\iota: Y \hookrightarrow Z$, G -équivariante, définie comme composée des morphismes $Y \rightarrow (H_C^{\lambda,+}/p)^{\mathcal{G}_K} \rightarrow Z$ donnée par les points précédents. Par la proposition 3.8, il suffit de montrer que ι est un homéomorphisme sur son image. Or, Z étant profini, Y est séparé. Soit $H \subset G$ un sous-groupe ouvert compact. Alors Y et Z sont naturellement des $O_L[H]$ -modules et ι est $O_L[H]$ -linéaire. De plus, Z est un $O_L[H]$ -module de type fini et donc Y aussi (comme $O_L[H]$ est noethérien). Or, Y est séparé, sa topologie est définie par sa topologie naturelle de $O_L[H]$ -module de type fini. En particulier, Y est profini et ι est un isomorphisme sur son image. \square

3.2. Décomposition en blocs

3.2.1. *Rappels sur la théorie des blocs.* — Soit $\zeta: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ un caractère unitaire. On rappelle que l'on note $\text{Tors } G$ (*resp.* $\text{Tors}^\zeta G$) la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_L[G]$ -modules lisses de longueur finie (et de caractère central ζ). Rappelons que pour π un $\mathcal{O}_L[G]$ -module lisse, on définit son dual de Pontryagin par

$$\pi^\vee := \text{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi, L/\mathcal{O}_L),$$

où l'on considère les applications continues et π^\vee est muni de l'action contragrédiente de G .

Pour $\pi \in \text{Tors}^{(\zeta)} G$ on note $P_\pi^{(\zeta)} \twoheadrightarrow \pi^\vee$ l'enveloppe projective de π^\vee (*cf.* [19, §II.5] et [22, §2]) ; c'est un $\mathcal{O}_L[G]$ -module compact. Pour \mathcal{B} un bloc de $\text{Tors}^{(\zeta)} G$ posons

$$P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := \bigoplus_{\pi \in \mathcal{B}} P_\pi^{(\zeta)}, \quad E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := \text{End}_G(P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}), \quad Z_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := Z(E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}),$$

où $Z(E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)})$ désigne le centre de $E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}$.

Proposition 3.13. — *On a une décomposition*

$$\text{Tors}^{(\zeta)} G = \prod_{\mathcal{B}} \text{Tors}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} G.$$

De plus, pour $\Pi \in \text{Tors}^{(\zeta)} G$, on a

$$\Pi \cong \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi^\vee))^\vee,$$

où $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}(\Pi^\vee) := \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}, \Pi^\vee)$.

Lemme 3.14. — *Soit $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}, M}^\lambda[1/p]$ un idéal maximal; notons L_x son corps résiduel, $\zeta := \zeta_M^\lambda$ et rappelons que $\Pi_x := \mathbf{\Pi}(\rho_x)$ est la L_x -représentation de Banach unitaire associée à la spécialisation de la représentation universelle au point x . Alors,*

$$\Pi'_x \cong P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$$

où l'on rappelle que $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, \Pi'_x)$.

Démonstration. — Notons

$$R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}, \zeta} \subset R := R_{\mathcal{B}, M}^\lambda, \quad L := L_x, \quad E := E_{\mathcal{B}}^\zeta, \quad E_x := E \otimes_{R^+} L$$

Soit $\Pi_x^+ \subset \Pi_x$ un \mathcal{O}_{L_x} -réseau stable et pour $k \geq 0$ un entier, $\pi_k := \Pi_x^+ / \varpi_L^k$. Alors $\pi_k \in \text{Tors}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} G$ et d'après la proposition 3.13, on a

$$\pi_k \cong (P_{\mathcal{B}} \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\pi_k^\vee))^\vee$$

En passant à la limite projective sur k , comme

$$\varprojlim_k \pi_k^\vee \cong \varprojlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi, \varpi_L^{-k} \mathcal{O}_L / \mathcal{O}_L) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\varprojlim_k \pi_k, \mathcal{O}_L),$$

ce qui vaut pour toute famille projective π_k de $\mathcal{O}_L[G]$ -modules tels que $\pi_{k+1} / \varpi_L^k = \pi_k$, on obtient, en prenant le \mathcal{O}_L -dual continu

$$(\Pi_x^+)' \cong P_{\mathcal{B}} \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}((\Pi_x^+)')$$

on inverse p pour obtenir le résultat. \square

3.2.2. Décomposition au niveau entier. — On commence par démontrer une décomposition au niveau entier, posons $\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+ := \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^{\lambda,+})$.

Proposition 3.15. — *On a un isomorphisme naturel de $L[\mathbb{G}]$ -modules topologiques*

$$H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^{\lambda,+} \cong \widehat{\bigoplus}_{\mathcal{B}} [P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+] .$$

où le complété à droite est le complété p -adique.

Démonstration. — La preuve est strictement la même que celle de [11, Proposition 5.21]; rappelons-en les points principaux. Notons $X := H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^{\lambda,+}$ et pour K/\mathbb{Q}_p une extension finie $X_{k,K} := (X/p^k)^{\mathcal{G}_K}$. D'après la proposition 3.8, $X_{k,K}$ est le dual d'un $O_L[G]$ -module lisse de longueur finie. On peut donc appliquer la décomposition en blocs de la proposition 3.13 au dual de $X_{k,K}$ i.e.

$$X_{k,K} = \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X_{k,K})) .$$

En passant à la limite inductive sur les extensions finies K/\mathbb{Q}_p , puisque $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) = \varinjlim_K \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X_{k,K})$ car $P_{\mathcal{B}}$ est compact et les $X_{k,K}$ sont profinis, on obtient, par le corollaire 3.12

$$X/p^k = \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k)) .$$

Comme $X = \varprojlim_k X/p^k$ d'après le corollaire 3.12 il reste à montrer $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X)/p^k$. La suite de la preuve de [11, Proposition 5.21] démontre essentiellement le lemme suivant

Lemme 3.16. — *Soit X un $O_L[G]$ -module topologique tel que*

- X est sans p -torsion et p -adiquement complet,
- X/p est la réunion de O_L -modules de longueur finie.

Alors, pour tout $k \geq 1$ on a un isomorphisme $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X)/p^k$.

Dans notre cas ce lemme s'applique puisque le premier point est vérifié par le corollaire 3.12 et le second point par la proposition 3.8. \square

Posons

$$\check{\mathbf{m}}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+ := \text{Hom}_{O_L}(\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+, O_L),$$

le dual continu topologique de $\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+$. C'est un O_L -module compact sans p -torsion muni d'une action de $Z_{\mathcal{B}}$.

Proposition 3.17. — *Le $Z_{\mathcal{B}}$ -module $\check{\mathbf{m}}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+$ est de type fini.*

Démonstration. — La preuve se fait exactement comme pour le [11, Théorème 5.22] en utilisant la proposition 3.9, rappelons la brièvement. Soit $\mathfrak{m} \subset Z_{\mathcal{B}}$ l'idéal maximal. Par le lemme de Nakayama (topologique) et la dualité, il suffit de montrer que $(\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+/\varpi_L)[\mathfrak{m}]$ est de dimension finie sur k_L . On a une injection

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^+/\varpi_L[\mathfrak{m}] \hookrightarrow \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}} \otimes_{Z_{\mathcal{B}}} k_L, H_{\text{ét}}^1({}^p M_C^n; \mathbb{V}_{\lambda}^+(1)/\varpi_D)).$$

Mais comme, d'après [24, corollaire 6.7], $P_{\mathcal{B}} \otimes_{Z_{\mathcal{B}}} k_L$ est le dual d'une L -représentation lisse et admissible de G , on conclut la preuve de la proposition par la proposition 3.9. \square

3.2.3. $E_{\mathcal{B},M}^\lambda$ est une algèbre d’Azumaya. — Posons

$$E_{\mathcal{B},M}^\lambda := E_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}, \zeta_M^\lambda}} R_{\mathcal{B},M}^\lambda.$$

Dans ce numéro, on démontre que $E_{\mathcal{B},M}^\lambda$ est une $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ -algèbre d’Azumaya. Notons que $E_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}$ n’est pas une algèbre d’Azumaya et que le résultat tient car les représentations apparaissant dans l’anneau de Kisinn sont absolument irréductibles. Pour démontrer ce résultat on doit raisonner bloc par bloc. Rappelons que (sous l’hypothèse que $p > 3$), les blocs absolu \mathcal{B} de $\text{Tors } G$ sont de la forme

- (i) $\mathcal{B} = \{\pi\}$ où π est une k_L -représentation supersingulième de G ,
- (ii) $\mathcal{B} = \{\text{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1 \omega^{-1}\}$ où $\chi_1, \chi_2: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$ sont des caractères lisses tels que $\chi_1 \chi_2^{-1} \neq 1, \omega^{\pm 1}$,
- (iii) $\mathcal{B} = \{\text{Ind}_B^G \chi \otimes \chi \omega^{-1}\}$ où $\chi: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$ est un caractère lisse,
- (iv) $\mathcal{B} = \{\eta \circ \det, \text{Sp} \otimes (\eta \circ \det), (\text{Ind}_B^G \omega \otimes \omega^{-1}) \otimes (\eta \circ \det)\}$ où $\eta: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$ est un caractère lisse et $\text{Sp} := \text{St}_{O_L} \otimes_{O_L} k_L$ est la Steinberg lisse à coefficients dans k_L .

Proposition 3.18. — Soit $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel.

Posons $E_x := E_{\mathcal{B},M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} L_x$, alors si \mathcal{B} est de type

- (i) $E_x \cong L_x$,
- (ii) $E_x \cong M_2(L_x)$,
- (iii) $E_x \cong M_2(L_x)$,
- (iv) $E_x \cong M_3(L_x)$.

En particulier, $E_{\mathcal{B},M}^\lambda$ est une $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ -algèbre d’Azumaya.

Démonstration. — Comme annoncé on raisonne bloc par bloc. Soit

$$E := E_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}, \quad R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}, \quad R_M := R_{\mathcal{B},M}^\lambda$$

On note $\mathfrak{r} := R^+ \cap \bigcap_x \mathfrak{m}_x$ l’idéal de réductibilité où l’intersection est prise sur tous les idéaux maximaux de $R^+[1/p]$ tels que la représentation ρ_x soit réductible. Comme pour $\mathfrak{m}_x \subset R_M$, ρ_x est irréductible, l’image de tout élément non nul de \mathfrak{r} dans L_x n’est pas nulle.

Si \mathcal{B} est de type (i) alors par [22, Theorem 1.5], $E \cong R^+$ donc $E_x \cong L_x$.

Si \mathcal{B} est de type (ii) alors par [22, Corollary B.20], $\mathfrak{r} = (c)$ est principal et par [22, Corollary B.27], $E_c \cong M_2(R_c^+)$ et donc $E_x \cong M_2(L_x)$.

Si \mathcal{B} est de type (iii) c’est exactement l’énoncé de [22, Corollary 9.28] (combiné à [22, Lemme 9.21] donnant la condition sur $\ll (uv - vu)(uv - vu)^*$ »puisque ρ_x est absolument irréductible.

Si \mathcal{B} est de type (iv), l’énoncé n’est pas n’apparaît pas tel quel dans [22, §10] mais on peut le déduire des résultats de cette section.

Quitte à tordre par un caractère on peut supposer que $\eta = 1$, posons

$$\pi_1 := \text{Ind}_B^G \omega \otimes \omega^{-1}, \quad \pi_2 := \text{Sp}, \quad \pi_3 := \mathbf{1}_G.$$

Pour $i = 1, 2, 3$ on pose P^i l’enveloppe projective de π_i^\vee , $P_x^i := P^i \otimes_{R^+} L_x$ et pour $j = 1, 2, 3$, $E^{i,j} := \text{Hom}_G(P^i, P^j)$, $E_x^{i,j} := E^{i,j} \otimes_{R^+} L_x$ (on change légèrement les notations par rapport à [22, §10]). Comme les P^i sont compacts et projectifs on a $E_x^{i,j} = \text{Hom}_G(P_x^i, P_x^j)$ et pour $\varphi \in E^{i,j}$ on note $\varphi_x \in E_x^{i,j}$ l’élément associé. Alors, $E = (E^{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ et $E_x = (E_x^{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$. On veut donc montrer que pour tous les entiers $i, j = 1, 2, 3$, $E_x^{i,j} \cong L_x$.

Pour $i = j$ le [22, Corollary 10.78] donne $E^{ii} \cong R^+$ donc $E_x^{ii} \cong L_x$ pour $i = 1, 2, 3$. On a des idéaux $\mathfrak{a}^{ii} \subset E^{ii}$ (cf. [22, Corollary 10.79] et avant le Lemme 10.74 pour la définition) tels que $\mathfrak{a}^{ii} \cong \mathfrak{r}$ d’après [22, Lemma 10.80] par l’isomorphisme $E^{ii} \cong R^+$ ci-dessus. Ainsi $\mathfrak{a}_x^{ii} := \mathfrak{a}^{ii} \otimes_{R^+} L_x \cong L_x$. Le [22, Lemma 10.74] donne $\varphi^{31} \in E^{13}$ et $\varphi^{12} \in E^{21}$ tels que :

- (237) $\Rightarrow \varphi^{31} \circ: E^{11} \xrightarrow{\sim} E^{13} \Rightarrow E_x^{13} \cong L_x$,
- (238) $\Rightarrow \varphi^{12} \circ: E^{22} \xrightarrow{\sim} E^{21} \Rightarrow E_x^{21} \cong L_x$,

- (240) $\implies E^{12} \cong \mathfrak{a}^{11} \implies E_x^{12} \cong L_x$,
- (241) $\implies E^{31} \cong \mathfrak{a}^{33} \implies E_x^{31} \cong L_x$,
- (242) $\implies E^{32} \cong \mathfrak{a}^{33} \implies E_x^{32} \cong L_x$.

Il reste à montrer que $E_x^{23} \cong L_x$. Or, E^{23} est engendré sur R^+ par deux éléments (*cf.* [22,]) $\varphi^{32} := \varphi^{31} \circ \varphi^{12}$ et un autre élément β (*cf.* [22, Lemma 10.75]). On sait d'après les deux premiers points ci-dessus (correspondant à (237) et (238)) que φ^{32} est un isomorphisme et donc il reste à montrer qu'il existe une constante $u \in L_x$ telle que $\beta_x = u\varphi_x^{32}$.

D'après [22, Lemma 10.92] il existe $c, d \in R^+$ tels que $c\beta = d\varphi^{32}$. Mais d'après [22, Corollary 10.94], $c, d \in \mathfrak{r}$. Ainsi c et d sont des constantes non nulles modulo \mathfrak{m}_x et $\beta_x = u\varphi_x^{32}$ où $u \in L_x$ est défini par $uc \equiv d \pmod{\mathfrak{m}_x}$.

□

Le corollaire suivant est alors immédiat :

Corollaire 3.19. — Soit F le corps des fractions d'un facteur de $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$. Alors $E_{\mathcal{B},M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} F$ est une algèbre semi-simple sur F .

Corollaire 3.20. — Soit $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel, notons $R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}$, alors

$$P_{\mathcal{B}} \otimes_{R^+} L_x \cong \Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^*$$

De plus, $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un L_x -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — Notons

$$E := E_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}, \quad R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}, \quad E_x := E \otimes_{R^+} L_x, \quad P_x := P_{\mathcal{B}} \otimes_{R^+} L_x.$$

Par le lemme 3.14 on a

$$(3.2) \quad \Pi'_x \cong P_{\mathcal{B}} \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong P_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x).$$

Notons que comme cet isomorphisme est un isomorphisme de E_x -modules $\Pi'_x \cong \Pi'_x \otimes_{L_x} E_x$. De plus, $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un L_x -espace vectoriel de dimension finie par [24, Corollary 6.7] car c'est un R^+ -module de type fini. Comme $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un E_x -module absolument irréductible par [22, Corollary 1.19], on a

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^* \cong E_x.$$

Il suffit alors d'appliquer $\otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^*$ pour obtenir le résultat, soit

$$\Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^* \cong \Pi'_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong P_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^* \cong P_x \otimes_{E_x} E_x \cong P_x.$$

□

3.2.4. Structure de $\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}$ comme $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}}$ -module. — Dans ce dernier numéro on finit la preuve du théorème 3.2. On commence par un lemme :

Lemme 3.21. — Soit V, W deux $E_{\mathcal{B},M}^\lambda[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules localement libres et de type fini sur $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$. Supposons que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B},M}^\lambda$, dont on note L_x le corps résiduel, on a un isomorphisme $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -équivariant

$$V \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} L_x \cong W \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} L_x,$$

et $V \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} L_x$ est irréductible, alors $V \cong W$.

Démonstration. — Comme $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ est un produit d'anneaux principaux, il suffit de se ramener à l'un de ses facteurs, que l'on note R par un projecteur. Soit F le corps des fractions de R , notons

$$E_R := E_{\mathcal{B},M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} R, \quad E_F := E_R \otimes_R F, \quad V_F := V \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} F, \quad W_F := W \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} F.$$

Les traces de V et W coïncident car leurs spécialisations en tout idéal maximal de R coïncident (comme il y a une infinité d'idéaux premiers). De plus, V_F et W_F sont des $E_F[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules irréductibles, sinon il existerait un ouvert $U \subset \text{Spec } R$ tel que la spécialisation de V et W

en les idéaux maximaux de U seraient réductibles. Comme E_F est une algèbre semi-simple d'après le corollaire 3.19 et par le théorème de Brauer-Nesbitt, on obtient un isomorphisme $V_F \cong W_F$ de $E_F[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules. En recopiant la preuve de [11, Lemme 5.12] on en déduit un isomorphisme $V \cong W$ de $R[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules, mais par construction, cet isomorphisme étendu à F redonne l'isomorphisme précédent $V_F \cong W_F$ qui commute à l'action de E_F , on en déduit que l'isomorphisme $V \cong W$ commute à l'action de E_R et donc que c'est un isomorphisme de $E_R[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules. \square

Notons

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^\lambda := \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, H_{\mathbb{Q}_p}^{\lambda,+}) \otimes_{O_L} L$$

Remarquons que puisque $P_{\mathcal{B}}$ est compact on a $\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^\lambda = \mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^{\lambda,+}$. On a de plus

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^\lambda = \bigoplus_{M \in \Phi N_\lambda^n} \mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda \otimes_L \text{JL}_M, \quad \mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda := \text{Hom}_{G \times \check{G}}(P_{\mathcal{B}} \otimes_{O_L} \text{JL}_M, H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda)$$

On achève maintenant la démonstration du théorème 3.2. Notons que le centre de \check{G} agit par le caractère ζ_M^λ sur $H_{\mathbb{Q}_p}^1[M]$, le centre de G agit par le caractère inverse $\zeta := (\zeta_M^\lambda)^{-1}$ (cf. [11, Remarque 5.23, (ii)]) ce qui fait de $\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda$ un $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta}[1/p]$ -module par le théorème 2.3.

Théorème 3.22. — Soit $\lambda \in P_+$ et $M \in \Phi N_\lambda^n$.

1. L'anneau $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta_M^\lambda}$ agit sur $\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda$ au travers de son quotient $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$.
2. On a un isomorphisme de $E_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ -modules

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^\zeta(\Pi(\rho_{\mathcal{B},M}^\lambda)') \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} \rho_{\mathcal{B},M}^\lambda \otimes_{R_{\mathcal{B},M}^\lambda} \check{R}_{\mathcal{B},M}^\lambda$$

où $\check{R}_{\mathcal{B},M}^\lambda$ est le L -dual continu de $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$.

Démonstration. — La preuve se fait exactement comme pour la preuve de [11, Théorème 5.24], donc on rappelle les éléments principaux.

Pour le premier point, notons $I := \ker(R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta_M^\lambda}[1/p] \rightarrow R_{\mathcal{B},M}^\lambda)$, on veut montrer que I annule $\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda$. Comme $p > 3$, on peut utiliser le théorème 2.3 et considérer $J := I \cap Z_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda}$. En vertu de la proposition 3.7, il suffit de montrer que J tue $\text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (\widehat{\text{LL}}_M^\lambda)')$. Soit Y le complété p -adique d'un O_L -réseau G -stable de LL_M^λ . Par compacité de $P_{\mathcal{B}}$ il suffit alors de montrer que pour tout $n \geq 1$, J annule

$$\text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y/p^n Y)')$$

On a un morphisme naturel d'image dense $Y \rightarrow Y_{\mathcal{B}}$ où $Y_{\mathcal{B}}$ est le complété \mathcal{B} -adique du réseau fixé de LL_M^λ ce qui induit une injection $\text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y_{\mathcal{B}}/p^n Y_{\mathcal{B}})') \hookrightarrow \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y/p^n Y)')$. Il reste ensuite à montrer que cette injection est un isomorphisme et que J annule $\text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y_{\mathcal{B}}/p^n Y_{\mathcal{B}})')$; la preuve est *verbatim* la même que la preuve du premier point de [11, Théorème 5.24].

Pour le second point on pose $X := \text{Spm}(R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta_M^\lambda}[1/p])$ et $X_M^\lambda := \text{Spm}(R_{\mathcal{B},M}^\lambda)$ et soit $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta_M^\lambda}[1/p]$ l'idéal maximal d'un point $x \in X$ dont on note L_x le corps résiduel. On commence par calculer $(\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda)[\mathfrak{m}_x]$:

- si $x \notin X_M^\lambda$, alors les images des éléments non nuls de \mathfrak{m}_x par $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps},\zeta_M^\lambda}[1/p] \rightarrow R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ sont inversibles et comme $(\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda)$ est un $R_{\mathcal{B},M}^\lambda$ -module, $(\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda)[\mathfrak{m}_x] = 0$,
- d'après le corollaire 3.20 on a

$$(\mathbf{m}_{\mathcal{B},M}^\lambda)[\mathfrak{m}_x] = \text{Hom}_G(P_{\mathcal{B}} \otimes_{R^+} L_x, H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda) \cong \text{Hom}_G(\Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x), H_{\mathbb{Q}_p}^\lambda) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_L \rho_x.$$

En résumé on a

$$(\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}^\lambda[M])[m_x] \cong \begin{cases} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{L_x} \rho_x & \text{si } x \in X_M^\lambda, \\ 0 & \text{si } x \notin X_M^\lambda. \end{cases}$$

Notons que $(\mathbf{m}_{\mathcal{B}, \text{ét}}^\lambda[M])[\mathfrak{m}_x]$ est le L_x -dual continu de $\check{\mathbf{m}}_{\mathcal{B}, M}^\lambda / \mathfrak{m}_x$. On calcule le L -dual continu de $\mathbf{n}_{\mathcal{B}, M}^\lambda := \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda} (\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda)') \otimes_R \rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda \otimes_R \check{R}_{\mathcal{B}, M}^\lambda$ pour obtenir

$$\check{\mathbf{n}}_{\mathcal{B}, M} \cong \text{Hom}_{R_{\mathcal{B}, M}^\lambda}(\mathbf{m}_{\mathcal{B}}^{\zeta_M^\lambda} (\mathbf{\Pi}(\rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda)'), \rho_{\mathcal{B}, M}^\lambda, R_{\mathcal{B}, M}^\lambda).$$

Ainsi $\check{\mathbf{n}}_{\mathcal{B}, M} / \mathfrak{m}_x \cong \text{Hom}_{L_x}(\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{L_x} \rho_x, L_x) \cong \check{\mathbf{m}}_{\mathcal{B}, M}^\lambda / \mathfrak{m}_x$. Or par la proposition 3.17, comme $\check{\mathbf{m}}_{\mathcal{B}, M}^\lambda$ est un $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}, \zeta_M^\lambda}[1/p]$ -module par l'isomorphisme du théorème 2.3 on en déduit que c'est un $R_{\mathcal{B}, M}^\lambda$ -module de type fini. On est donc dans la situation du lemme 3.21 qui permet de conclure la preuve. \square

Références

- [1] G. Alon and E. de Shalit. On the cohomology of Drinfel'd's p -adic symmetric domain. *Isr. J. Math.* 129, 1–20 (2002).
- [2] L. Berger, P. Colmez. Familles de représentations de de Rham et monodromie p -adique. In *Représentations p -adiques de groupes p -adiques I : Représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 319, pages 303–337. Paris : Société Mathématique de France, (2008).
- [3] C. Breuil. Série spéciale p -adique et cohomologie étale complétée. In *Représentations p -adiques de groupes p -adiques III : Méthodes globales et géométriques*, Astérisque 331, pages 65–115. Paris : Société Mathématique de France, (2010).
- [4] A. Chitroo, E. Ghate. Reductions of semi-stable representations using the Iwahori mod p Local Langlands Correspondence. Preprint, arXiv :2311.03740 [math.NT] (2023).
- [5] P. Colmez. Fonctions d'une variable p -adique. In *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, pages 13–59. Paris : Société Mathématique de France, (2010).
- [6] P. Colmez. La série principale unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. In *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, pages 213–262. Paris : Société Mathématique de France, (2010).
- [7] P. Colmez. Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules. In *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, pages 281–509. Paris : Société Mathématique de France, (2010).
- [8] P. Colmez and G. Dospinescu. Complétés universels de représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra Number Theory*, 8(6) :1447–1519, (2014).
- [9] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Cohomologie p -adique de la tour de Drinfeld : Le cas de la dimension 1. *J. Am. Math. Soc.*, 33(2) :311–362, (2020).
- [10] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Correspondance de Langlands p -adique et anneaux de Kisin. *Acta Arithmetica* vol. 208, 2, 101–126, (2023).
- [11] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Factorisation de la cohomologie étale p -adique de la tour de Drinfeld. *Forum Math. Pi*, 11 :62, (2023). Id/No e16.
- [12] P. Colmez, G. Dospinescu, and V. Paškūnas. The p -adic local Langlands correspondence for $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. *Camb. J. Math.*, 2(1) :1–47, (2014).
- [13] P. Colmez and J.-M. Fontaine. Construction des représentations p -adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, (2000).
- [14] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compos. Math.*, 97(1-2) :89–118, (1995).
- [15] G. Dospinescu. Extensions de de Rham et vecteurs localement algébriques. *Compo. Math.*, 151 :1462–1498, (2015).
- [16] V. G. Drinfel'd. Coverings of p -adic symmetric regions. *Funct. Anal. Appl.*, 10 :107–115, (1976).
- [17] M. Emerton. Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for $GL_{2, \mathbb{Q}}$. Preprint at https://math.uchicago.edu/~emerton/pdf_files/lg.pdf (2011)
- [18] L. Fargues, A. Genestier, V. Lafforgue. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. *Progress in Mathematics*, Vol. 262, Birkhäuser, (2008).
- [19] P. Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. Fr.* 90, 323–448 (1962).

- [20] M. Kisin Potentially semi-stable deformation rings. *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. 21, n° 2, (2008).
- [21] R. Liu Semistable periods of finite slope families. *Algebra Number Theory* 9, n° 2, 435-458, (2015).
- [22] V. Paškūnas. The image of Colmez's Montreal functor. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 118, 1-191, (2013).
- [23] V. Paškūnas. Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *Automorphic forms and Galois representations*. Vol. 2, 231-247 London Math. Soc. Lecture Note Ser. 415, Cambridge Univ. Press (2014).
- [24] V. Paškūnas and S.-N. Tung. Finiteness properties of the category of mod p représentations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Forum Math. Sigma* 9, Paper No. e80, 39 p. (2021).
- [25] B. Schraen. Représentation p -adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées. *Isr. J. Math.*, 176 :307–361, (2010).
- [26] A. Vanhaecke. Cohomologie de systèmes locaux p -adiques sur les revêtements du demi-plan de Drinfeld. Preprint, arXiv :2405.10048 [math.NT] (2024).
- [27] C. Wang-Erickson. Algebraic families of Galois representations and potentially semi-stable pseudo-deformation rings. *Math. Ann.* 371, n° 3-4, 1615-1681, (2018).

28 octobre 2025

ARNAUD VANHAECKE, Morningside Center of Mathematics, No. 55, Zhongguancun East Road, Beijing, 100190, China.

E-mail : arnaud@amss.ac.cn